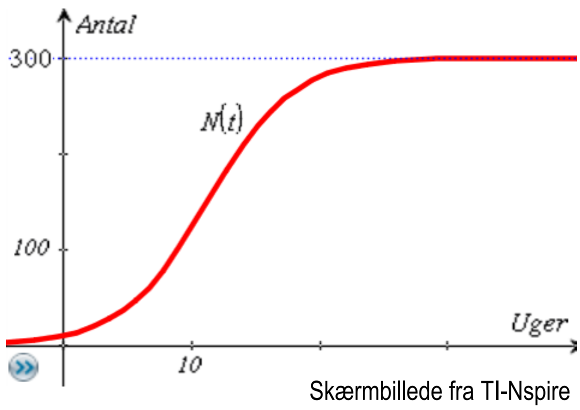
Differential-ligninger

for A-niveau i stx, udgave 2



Skærmbillede fra TI-Nspire

2015 Karsten Juul

Differentialligninger for A-niveau i stx, udgave 2

1. Hvad er en differentialligning?

2. Kontrol af løsning til differentialligning

3. Bruge oplysningen i differentialligning

4. Bestemme løsning til differentialligning

5. Opstille differentialligning

6. Logistisk differentialligning

7. Beviser

En tidligere version af dette hæfte har skiftet adresse til

http://mat1.dk/differentialligninger_for_a_niveau_i_stx_udgave_1.pdf

Gå ind på http://mat1.dk/noter.htm for at downloade nyeste version af dette hæfte.

 15/1-2015

1. Hvad er en differentialligning?

1a. Oplæg til differentialligninger.

En plantes højde y vokser sådan at der på ethvert tidspunkt t gælder at

højdes væksthastighed = højde

Dette kan vi skrive med symboler sådan:

$$y' = y$$

← Her har vi opstillet en differentialligning.

Vi kan også udtrykke dette ved at sige at i hvert punkt på grafen er

tangenthældning = y-koordinat

Ligningen $y' = y$ er et eksempel på en differentialligning. De fleste differentialligninger er mere indviklede.

For funktionen $f(x) = 4e^x$ gælder at $f'(x) = 4e^x$, så

$f(x)$ opfylder betingelsen $y' = y$ for hvert x.

Dette udtrykker vi ved at sige at

$f(x)$ er en løsning til differentialligningen

eller at

$f(x)$ tilfredsstiller differentialligningen

Vi ser at funktionen $f(x) = -e^x$ også er en løsning.

Vi ser at differentialligningen har mange løsninger.

Symbolet $\frac{dy}{dx}$ betyder det samme som y'.

Differentialligningen

$$y' = y$$

kan også skrives sådan:

$$\frac{dy}{dx} = y$$

eller sådan:

$$f'(x) = f(x) \ .$$

1b. Hvad er en differentialligning?

En ligning er en differentialligning hvis

den ubekendte er en funktion

og

funktionens differentialkvotient indgår

En funktion er løsning til en differentialligning hvis

funktionen opfylder differentialligningen for hvert x i funktionens definitionsmængde.

2. Kontrol af løsning til differentialligning

2a. Undersøg om funktion er løsning til differentialligning. Gør rede for at funktion er løsning til differentialligning. Eksempel 1.

Opgave

Forskriften fortæller at i hvert grafpunkt får man *y*-koordinat ved at opløfte x-koordinat til anden og lægge x-koordinat til resultatet.

Undersøg om funktionen $f(x) = x^2 + x$ er en løsning til differentialligningen

$$y' - 2y = 1 - 2x^2 \ .$$

Ligningen kræver for hvert grafpunkt at når
y-koordinat gange 2 trækkes fra tangenthældning
skal det give samme tal som når
x-koordinat i anden gange 2 trækkes fra 1.

Besvarelse

Vi indsætter $f(x) = x^2 + x$ for y i $y' - 2y = 1 - 2x^2$:

$$(x^2 + x)' - 2(x^2 + x) = 1 - 2x^2$$

$$2x + 1 - (2x^2 + 2x) = 1 - 2x^2$$

$$2x + 1 - 2x^2 - 2x = 1 - 2x^2$$

$$1 - 2x^2 = 1 - 2x^2$$

Da dette er sandt, gælder: $\underline{\underline{f \text{ er løsning}}}$ til differentialligningen $y' - 2y = 1 - 2x^2$.

2b. Undersøg om funktion er løsning til differentialligning. Gør rede for at funktion er løsning til differentialligning. Eksempel 2.

Opgave

Forskriften fortæller at i hvert grafpunkt får man *y*-koordinat ved at indsætte *x*-koordinat i forskrift og regne ud.

Undersøg om funktionen $f(x) = x^2 \cdot \ln x + x$ er en løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} + x - 1 .$$

Ligningen kræver for hvert grafpunkt at
tangenthældning
skal være det tal man får når man
indsætter *x*-koordinat og *y*-koordinat i højre side og regner ud

Besvarelse

Vi indsætter $f(x) = x^2 \cdot \ln x + x$ for y i $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} + x - 1$:

$$(x^2 \cdot \ln x + x)' = \frac{2(x^2 \cdot \ln x + x)}{x} + x - 1$$

$$2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} + 1 = \frac{2x(x \cdot \ln x + 1)}{x} + x - 1$$

$$2x \cdot \ln x + x + 1 = 2(x \cdot \ln x + 1) + x - 1$$

$$2x \cdot \ln x + x + 1 = 2x \cdot \ln x + 2 + x - 1$$

$$2x \cdot \ln x + x + 1 = 2x \cdot \ln x + x + 1$$

Da dette er sandt, gælder: $\underline{\underline{f \text{ er løsning}}}$ til differentialligningen $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} + x - 1$.

3. Bruge oplysningen i differentialligning

3a. Bestem ligning for tangent når differentialligning er givet.

Opgave

En funktion f er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - y$$

og grafen for f går gennem punktet $P(3,7)$.

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet P .

Ligningen fortæller at i ethvert grafpunkt får vi tangenthældningen $\frac{dy}{dx}$ når vi opløfter x-koordinaten til anden og trækker y-koordinaten fra resultatet.

Besvarelse

For en løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - y$$

gælder at i punktet $(x_1, y_1) = (3,7)$ er tangenthældningen

$$a = \frac{dy}{dx} = 3^2 - 7 = 2$$

(Vi har indsat 3 og 7 for x og y i højre side af $\frac{dy}{dx} = x^2 - y$).

Ligning for tangent i $P(3,7)$:

$$y = a(x - x_1) + y_1$$

$$y = 2(x - 3) + 7$$

$$\underline{\underline{y = 2x + 1}}$$

3b. Eksempel på brug af oplysningen i differentialligningen.

Opgave

En funktion f er defineret for ethvert tal x og er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+1}{y^2+1} \ .$$

Gør rede for at f har et minimum.

Ligningen fortæller at i ethvert grafpunkt er tangenthældningen $\frac{dy}{dx}$ det tal vi får ved at udregne højresiden efter at have indsat grafpunktets koordinater.

Besvarelse

I ethvert punkt (x, y) på grafen for f er tangenthældningen $\frac{2x+1}{y^2+1}$.

Dette tal har samme fortegn som $2x+1$,
for y^2+1 er altid positivt da et tal i anden ikke kan være negativt.

$2x+1=0$ har løsningen $x = -\frac{1}{2}$.

For $x = -1$ er $2x+1 = -1$, og for $x = 0$ er $2x+1 = 1$.

Tangenthældningen er altså negativ for $x < -\frac{1}{2}$ og positiv for $-\frac{1}{2} < x$, så
f er aftagende i intervallet $x \le -\frac{1}{2}$ og voksende i intervallet $-\frac{1}{2} \le x$.

Heraf følger at f har minimum for $x = -\frac{1}{2}$.

3c. Bestem væksthastighed ud fra differentialligning. Eksempel 1.

Opgave

Udviklingen i et dyrs vægt kan beskrives ved differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} + 0{,}028y = 16{,}2 \quad , \qquad 0 \le t \le 9$$

Ligningen fortæller at på ethvert tidspunkt mellem 0 og 9 gælder:
Når væksthastigheden $\frac{dy}{dt}$ lægges sammen med 0,028 gange vægten, så får man 16,2.

hvor t er tiden målt i uger, og y er dyrets vægt målt i gram.

Bestem væksthastigheden på det tidspunkt hvor dyrets vægt er 180 gram.

Besvarelse

Vi indsætter 180 for y i differentialligningen:

$$\frac{dy}{dt} + 0{,}028 \cdot 180 = 16{,}2$$

Når vi indsætter en konstant for y, så skal vi bevare y i dy.

$$\frac{dy}{dt} = 16{,}2 - 0{,}028 \cdot 180$$

$$\frac{dy}{dt} = 11{,}16$$

Når dyrets vægt er 180 gram, er væksthastigheden $\underline{\underline{11{,}2 \text{ gram pr. uge}}}$.

Ovenfor løste vi en ligning ved at trække samme tal fra begge sider. Hvis vi i stedet vil bruge solve, kan vi taste solve$(ym+0.028\cdot 180=16.2,ym)$.

3d. Bestem væksthastighed ud fra differentialligning. Eksempel 2.

Opgave

En plantes højde er en funktion af tiden der opfylder differentialligningen

$$\frac{dh}{dt} = 0{,}026 \cdot 0{,}93^t \cdot h$$

Ligningen fortæller at vi får væksthastigheden $\frac{dh}{dt}$ når vi udregner højre side efter at have indsat tidspunkt og højde på *t*'s og *h*'s pladser.

hvor h er højden målt i mm, og t er tidspunktet målt i døgn.
Det oplyses at $h(1) = 3$.

Bestem væksthastigheden til tidspunktet $t = 1$.

Besvarelse

Vi indsætter 1 for t og 3 for h i differentialligningen:

$$\frac{dh}{dt} = 0{,}026 \cdot 0{,}93^1 \cdot 3$$

$$\frac{dh}{dt} = 0{,}07254$$

Til tidspunktet $t = 1$ er væksthastigheden $\underline{\underline{0{,}073 \text{ mm pr. døgn}}}$.

4. Bestemme løsning til differentialligning

4a. Bestem løsningerne til en differentialligning.

4b Opgave Bestem forskrift for løsningerne til differentialligningen $y' = y - 1{,}3$.

Besvarelse

Nspire løser ligningen $y' = y - 1{,}3$ mht. funktionen y og får løsningerne $\underline{\underline{y = c \cdot e^x + 1{,}3}}$.

deSolve$(y'=y-1.3,x,y)$ ▸ $y=c1\cdot e^x+1.3$

Bemærkning I stedet for c skriver Nspire $c1$ eller $c2$ eller $c3$ osv.

4c De enkelte løsninger

I besvarelsen ovenfor fandt vi at løsningerne til $y' = y - 1{,}3$ er $y = c \cdot e^x + 1{,}3$.

Når vi i $y = c \cdot e^x + 1{,}3$ erstatter c med et bestemt tal, får vi én af løsningerne.

Hvis vi ved at $y(2) = 5$, dvs. at punktet $(2, 5)$ ligger på grafen, så kan vi bestemme c .
Dette kan vi gøre med metoden fra ramme 10, men vi kan også blot sætte 2 og 5 ind for x og y i $y = c \cdot e^x + 1{,}3$ og løse mht. c :

$$5 = c \cdot e^2 + 1{,}3 \qquad \text{hvoraf} \qquad c = \frac{5-1{,}3}{e^2} = 0{,}500741 \ .$$

Løsningen hvor $y(2) = 5$, er altså $y = 0{,}50 \cdot e^x + 1{,}3$. På tilsvarende måde får vi:
Løsningen hvor $y(2) = 3$, er $y = 0{,}23 \cdot e^x + 1{,}3$.

4d. Bestem en løsning til en differentialligning når én funktionsværdi (ét grafpunkt) er givet.

Opgave

En funktion h er løsning til differentialligningen

$$\frac{dh}{dx} = 0{,}25(h - x)$$

og grafen for h går gennem punktet $(2 , 1{,}6)$.

Bestem en forskrift for h .

Besvarelse

Nspire bestemmer forskriften for den løsning til $\frac{dh}{dx} = 0{,}25(h-x)$ hvor $h(2) = 1{,}6$ og får

$$\underline{\underline{h(x) = -2{,}67 \cdot 1{,}284^x + x + 4}}$$

Samme bogstav x før h

deSolve$(h'=0.25\cdot(h-x)$ and $h(2)=1.6,x,h)$ ▸ $h=^-2.66873\cdot(1.28403)^x+x+4.$

Samme bogstav

I stedet kunne vi have startet med at finde alle løsninger (se 4b).
Derefter kunne vi have bestemt den af løsningerne hvor $h(2)=1{,}6$ (se 4c).

4e. Bestem en løsning til en differentialligning når to funktionsværdier (to grafpunkter) er givet.

Opgave

En funktion p er løsning til differentialligningen

$$\frac{dp}{dt} = k - p \ .$$

Det oplyses at når $t = 0$ er $p = 2$, og at når $t = 1$ er $p = 1{,}5$.

Bestem en forskrift for p .

BEMÆRK: Vi bruger kun det ene af de to oplyste grafpunkter.
Når vi har fundet forskriften, bruger vi det andet punkt til at bestemme k .

Besvarelse

Nspire bestemmer en forskrift for den løsning p til $\frac{dp}{dt} = k - p$ hvor $p(0) = 2$, og får

$$p(t) = (2-k)\cdot \mathrm{e}^{-t} + k$$

Da $p(1) = 1{,}5$, er $(2-k)\cdot \mathrm{e}^{-1} + k = 1{,}5$.

Nspire løser ligningen $(2-k)\cdot \mathrm{e}^{-1} + k = 1{,}5$ mht. k og får $k = 1{,}21$.

Den søgte forskrift er altså $p(t) = (2-1{,}21)\cdot \mathrm{e}^{-t} + 1{,}21$, dvs.

$$\underline{\underline{p(t) \ = \ 0{,}79\cdot \mathrm{e}^{-t} + 1{,}21}} \ .$$

Brug to forskellige punkter
(0 , 2) og (1 , 1,5) .

deSolve$(p'=k-p \text{ and } p(0)=2,t,p)$ ▸ $p=(2-k)\cdot \mathbf{e}^{-t}+k$

solve$((2-k)\cdot \mathbf{e}^{-1}+k=1.5,k)$ ▸ $k=1.20901$

5. Opstille differentialligning.

5a. Opgave

På en skærm er et stort kvadrat med arealet 500 .
Inden i det store kvadrat er et lille kvadrat med siden s.
Den hastighed hvormed det lille kvadrats side vokser på tidspunktet t,
er proportional med forskellen på det store kvadrats areal og det lille kvadrats areal.
Proportionalitetskonstanten er 0,00792 .

Opstil en differentialligning der har $s(t)$ som løsning.

Besvarelse

$\boldsymbol{s}$ = lille kvadrats side

$\mathbf{500-s^2}$ = forskel på stort og lille kvadrats areal

$\boldsymbol{s'}$ = hastighed hvormed s vokser

s' er proportional med forskel, dvs.

s' er kostant gange forskel. Konstanten er 0,00792 , så

$$s' = 0{,}00792 \cdot (500-s^2)$$

Jeg har brugt farver til at pege på det der er det samme. Du skal ikke bruge farver til eksamen.

Differentialligningen som har $s(t)$ som løsning, kan skrives på flere måder, **f.eks**.

$s' = 0{,}00792 \cdot (500-s^2)$ eller $s'(t) = 0{,}00792 \cdot (500-s(t)^2)$ eller $\frac{ds}{dt} = 0{,}00792 \cdot (500-s^2)$

Til eksamen skal du kun skrive én af de tre ligninger.

6. Logistisk differentialligning

6a. Vi opstiller en differentialligning

For en population af dyr er $N(t)$ antallet af dyr på tidspunktet t uger.

Det er oplyst at populationen vokser sådan at

(1) *væksthastigheden* er proportional med
produktet af antallet og differensen mellem 300 og antallet

Ved at skrive (1) med symboler får vi følgende differentialligning:

(2) $N' = k \cdot N \cdot (300 - N)$ ← Her står: det røde er proportional med det blå.

N' = væksthastigheden
N = antallet
300 – N = differens mellem 300 og antallet

6b. Vi finder proportionalitetskonstanten

Det er oplyst at

væksthastigheden er 20 på det tidspunkt hvor *antallet* er 100

dvs.

(3) $N' = 20$ når $N = 100$

Ud fra (2) og (3) kan vi finde proportionalitetskonstanten k:

$$N' = k \cdot N \cdot (300 - N)$$

$$20 = k \cdot 100 \cdot (300 - 100)$$

$$k = 0{,}001$$

Antallet $N(t)$ er altså en løsning til differentialligningen

(4) $N' = 0{,}001 \cdot N \cdot (300 - N)$

6c. Hvad er en logistisk differentialligning?

Differentialligning (4) er af typen

$$y' = k \cdot y \cdot (M - y)$$

En differentialligning af denne type kaldes en logistisk differentialligning.

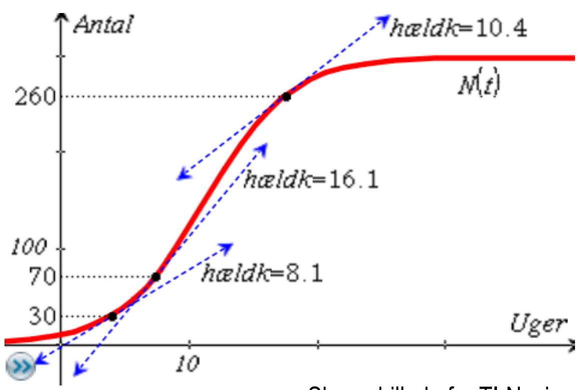
6d. Hvordan ændres væksthastigheden?

Af (4) får vi:

Når $N = 30$ er $N' = 8{,}1$
Når $N = 70$ er $N' = 16{,}1$ Se figur

Når antallet er 70, så vokser det altså hurtigere end når det er 30.
Grunden er at

så længe der er god plads, gælder
at når der er flere dyr,
vil der komme flere unger.



Skærmbillede fra TI-Nspire

Af (4) får vi:

Når $N = 260$ er $N' = 10{,}4$ Se figur

Når antallet er 260, så vokser det altså langsommere end når det er 70. Grunden er at

når der er mange dyr, er der mindre plads pr. dyr,
og så kommer der ikke så mange unger.

6e. Hvor stor er populationen når den vokser hurtigst?

Vi vil finde ud af hvor stort antallet N er når væksthastigheden er størst. Vi skal altså finde ud af hvad N skal være for at følgende udtryk er størst:

$$hast(N) \;=\; 0{,}001\cdot N\cdot(300-N) \;=\; 0{,}3\cdot N - 0{,}001\cdot N^2$$

Vi får $hast'(N) \;=\; 0{,}3 - 0{,}002\cdot N$ så $hast'(N) \;=\; 0$ netop når $N = 150$.

Da $hast'(100) = 0{,}1$ og $hast'(200) = -0{,}1$, er $hast$ voksende i intervallet $N \le 150$ og aftagende i intervallet $150 \le N$, så største væksthastighed er $hast(150) \;=\; 22{,}5$.

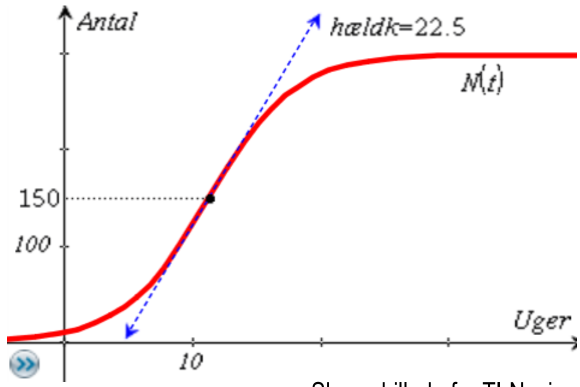
Se figur

Når antallet af dyr er 150,
er væksthastigheden størst.
Den største væksthastighed er 22,5

For en logistisk funktion y hvor

$$y' \;=\; k\cdot y\cdot(M-y)$$

er $\frac{M}{2}$ størrelsen af y når y' er størst.



Skærmbillede fra TI-Nspire

6f. Vi finder forskrifter for løsningerne til differentialligningen

I formelsamlingen står at funktionerne

(5) $\quad y \;=\; \dfrac{M}{1+c\cdot e^{-kM\cdot t}}$ $\qquad$ er løsning til $\qquad y' \;=\; k\cdot y\cdot(M-y)$

Af (5) får vi at funktionerne

(6) $\quad N(t) \;=\; \dfrac{300}{1+c\cdot e^{-0{,}3\cdot t}}$ $\qquad$ er løsning til $\qquad N' \;=\; 0{,}001\cdot N\cdot(300-N)$

6g. Vi finder den af løsningerne der passer med populationen

Det er oplyst at til tiden $t=0$ er antallet $N=10$.

Dette indsætter vi i (6) og får $\quad 10 \;=\; \dfrac{300}{1+c\cdot e^{-0{,}3\cdot 0}}$ $\quad$ dvs. $\quad 10 \;=\; \dfrac{300}{1+c}$ $\quad$ så $\quad c = 29$.

Antallet af dyr er altså fastlagt ved

(7) $\quad N(t) \;=\; \dfrac{300}{1+29\cdot e^{-0{,}3\cdot t}}$

6h. Hvad sker der med antallet i det lange løb?

Da $29\cdot e^{-0{,}3\cdot t}$ er eksponentielt aftagende, er

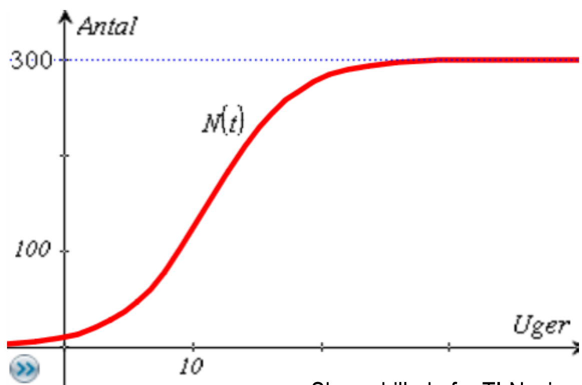
$$29\cdot e^{-0{,}3\cdot t} \;\approx\; 0 \qquad \text{når } t \text{ er stor}$$

så af (7) ser vi at

$$N(t) \;\approx\; 300 \qquad \text{når } t \text{ er stor}$$

Se figur

Altså er 300 den øvre grænse for hvor mange dyr der er plads til. Tallet 300 kaldes *bæreevnen*.



Skærmbillede fra TI-Nspire

For en logistisk funktion y hvor $y' \;=\; k\cdot y\cdot(M-y)$, er M den øvre grænse for y .

7. Beviser

7a. Hjælpesætning: $\left(\mathrm{e}^{kx}\right)' = k\,\mathrm{e}^{kx}$

Bevis: For e^{kx} er den ydre funktion $\mathrm{e}^{(\ )}$, og den indre er kx.
Differentialkvotienten af den ydre er $\mathrm{e}^{(\ )}$, og differentialkvotienten af den indre er k.
Differentialkvotienten af e^{kx} er ydre differentieret (taget i indre) gange indre differentieret: $\left(\mathrm{e}^{kx}\right)' = \mathrm{e}^{(kx)} \cdot k = k\,\mathrm{e}^{kx}$. Hermed har vi bevist hjælpesætningen.

7b. Sætning

Løsningerne til differentialligningen

(1) $\quad y' = k\,y$

er funktionerne

(2) $\quad y(x) = c\,\mathrm{e}^{kx}$

På k's plads i denne forskrift skal stå det tal der står på k's plads i differentialligningen.
Uanset hvilket tal vi skriver på c's plads, så får vi en løsning. Der er altså uendelig mange løsninger.

Første del af beviset: Vi beviser at hvis en funktion er løsning til **(1)**, så er den af typen **(2)**.

Anden del af beviset: Vi beviser at alle funktioner af typen **(2)** er løsninger til **(1)**.

1. del af beviset for sætningen

Hvis en funktion $y(x)$ har egenskaben **(1)** er

$$\left(y \cdot \mathrm{e}^{-kx}\right)' = y' \cdot \mathrm{e}^{-kx} + y \cdot \left(-k\,\mathrm{e}^{-kx}\right) \qquad \text{regel for at differentiere produkt}$$

$$= k\,y \cdot \mathrm{e}^{-kx} + y \cdot \left(-k\,\mathrm{e}^{-kx}\right) \qquad \text{da vi forudsatte (1)}$$

$$= 0$$

Da $y \cdot \mathrm{e}^{-kx}$ differentieret giver 0, må $y \cdot \mathrm{e}^{-kx}$ være lig en konstant:

$$y \cdot \mathrm{e}^{-kx} = c$$

Vi ganger begge denne lignings sider med e^{kx} og får

$$y = c\,\mathrm{e}^{kx} \qquad \text{da } \mathrm{e}^{-kx} \cdot \mathrm{e}^{kx} = \mathrm{e}^{-kx+kx} = \mathrm{e}^{0} = 1\ .$$

dvs. funktionen er af typen **(2)**.

2. del af beviset for sætningen

En vilkårlig funktion $c\,\mathrm{e}^{kx}$ af typen **(2)** indsætter vi for y i ligningen $y' = k\,y$ og får

$$\left(c\,\mathrm{e}^{kx}\right)' = k\,c\,\mathrm{e}^{kx}$$

Venstre side af ligningen giver $c\,k\,\mathrm{e}^{kx}$, dvs. ligningen passer, så funktionen $c\,\mathrm{e}^{kx}$ har egenskaben **(1)**.