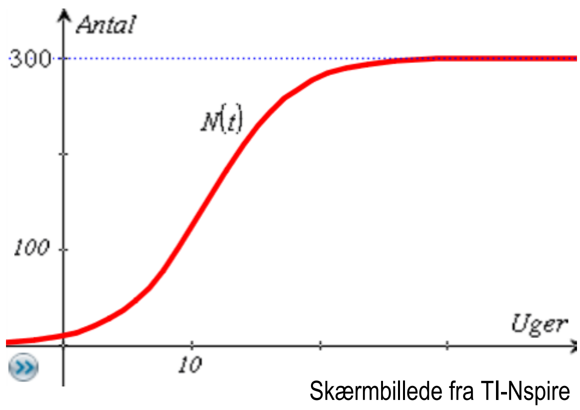
Differential-ligninger

for A-niveau i stx



2013 Karsten Juul

Differentialligninger for A-niveau i stx

Gå ind på http://mat1.dk/noter.htm for at downloade nyeste version af dette hæfte.

1. Oplæg til differentialligninger.

En plantes højde y vokser sådan at der på ethvert tidspunkt t gælder at

højdens væksthastighed = højden

Dette kan vi skrive med symboler sådan:

$y' = y$ ← Her har vi opstillet en differentialligning.

Vi kan også udtrykke dette ved at sige at i hvert punkt på grafen er

tangenthældningen = y-koordinaten

Ligningen $y' = y$ er et eksempel på en differentialligning.

For funktionen $f(x) = 4e^x$ gælder at $f'(x) = 4e^x$, så

$f(x)$ opfylder betingelsen $y' = y$ for hvert x.

Dette udtrykker vi ved at sige at

$f(x)$ er en løsning til differentialligningen

eller at

$f(x)$ tilfredsstiller differentialligningen

Vi ser at funktionen $f(x) = -e^x$ også er en løsning.

Vi ser at differentialligningen har mange løsninger.

Symbolet $\frac{dy}{dx}$ betyder det samme som y'.

Differentialligningen

$y' = y$

kan også skrives sådan:

$$\frac{dy}{dx} = y$$

eller sådan:

$f'(x) = f(x)$.

2. Hvad er en differentialligning?

En ligning er en differentialligning hvis

den ubekendte er en funktion

og

funktionens differentialkvotient indgår

En funktion er løsning til en differentialligning hvis

funktionen opfylder differentialligningen for hvert x i funktionens definitionsmængde.

3. Undersøg om funktion er løsning til differentialligning. Gør rede for at funktion er løsning til differentialligning. Eksempel 1.

Opgave

Undersøg om funktionen $f(x) = x^2 + x$ er en løsning til differentialligningen

$$y' - 2y = 1 - 2x^2 \ .$$

Besvarelse

Vi indsætter $f(x) = x^2 + x$ for y i $y' - 2y = 1 - 2x^2$:

$$(x^2 + x)' - 2(x^2 + x) = 1 - 2x^2$$

$$2x + 1 - (2x^2 + 2x) = 1 - 2x^2$$

$$2x + 1 - 2x^2 - 2x = 1 - 2x^2$$

$$1 - 2x^2 = 1 - 2x^2$$

Da dette er sandt, gælder: $\underline{\underline{f \text{ er løsning til differentialligningen}}}$

4. Undersøg om funktion er løsning til differentialligning. Gør rede for at funktion er løsning til differentialligning. Eksempel 2.

Opgave

Undersøg om funktionen $f(x) = x^2 \cdot \ln x + x$ er en løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} + x - 1 .$$

Besvarelse

Vi indsætter $f(x) = x^2 \cdot \ln x + x$ for y i $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y}{x} + x - 1$:

$$(x^2 \cdot \ln x + x)' = \frac{2(x^2 \cdot \ln x + x)}{x} + x - 1$$

$$2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} + 1 = \frac{2x(x \cdot \ln x + 1)}{x} + x - 1$$

$$2x \cdot \ln x + x + 1 = 2(x \cdot \ln x + 1) + x - 1$$

$$2x \cdot \ln x + x + 1 = 2x \cdot \ln x + 2 + x - 1$$

$$2x \cdot \ln x + x + 1 = 2x \cdot \ln x + x + 1$$

Da dette er sandt, gælder: $\underline{\underline{f \text{ er løsning til differentialligningen}}}$

5. Bestem ligning for tangent når differentialligning er givet.

Opgave

En funktion f er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - y$$

og grafen for f går gennem punktet $P(3, 7)$.

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet P .

Besvarelse

I punktet $(x_1, y_1) = (3,7)$ er tangenthældningen

$$a = \frac{dy}{dx} = 3^2 - 7 = 2$$

Tangenten i P :

$$y = a(x - x_1) + y_1$$

$$y = 2(x - 3) + 7$$

$$\underline{\underline{y = 2x + 1}}$$

6. Eksempel på brug af oplysningen i differentialligningen.

Opgave

En funktion f er defineret for ethvert tal x og er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+1}{y^2+1} \ .$$

Gør rede for at f har et minimum.

Besvarelse

I ethvert punkt (x, y) på grafen for f er tangenthældningen $\dfrac{2x+1}{y^2+1}$.

Dette tal har samme fortegn som $2x+1$,
for y^2+1 er altid positivt da et tal i anden ikke kan være negativt.

$2x+1=0$ har løsningen $x = -\frac{1}{2}$.
For $x = -1$ er $2x+1 = -1$, og for $x = 0$ er $2x+1 = 1$.

Tangenthældningen er altså negativ for $x < -\frac{1}{2}$ og positiv for $-\frac{1}{2} < x$, så
f er aftagende i intervallet $x \le -\frac{1}{2}$ og voksende i intervallet $-\frac{1}{2} \le x$.

Heraf følger at f har minimum for $x = -\frac{1}{2}$.

7. Bestem væksthastighed ud fra differentialligning. Eksempel 1.

Opgave

Udviklingen i et dyrs vægt kan beskrives ved differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} + 0{,}028y = 16{,}2 \quad , \qquad 0 \le t \le 9$$

hvor t er tiden målt i uger, og y er dyrets vægt målt i gram.

Bestem væksthastigheden på det tidspunkt hvor dyrets vægt er 180 gram.

Besvarelse

Vi indsætter 180 for y i differentialligningen:

$$\frac{dy}{dt} + 0{,}028 \cdot 180 = 16{,}2$$

$$\frac{dy}{dt} = 16{,}2 - 0{,}028 \cdot 180$$

$$\frac{dy}{dt} = 11{,}16$$

Når dyrets vægt er 180 gram, er væksthastigheden $\underline{\underline{11{,}2 \text{ gram pr. uge}}}$.

Ovenfor løste vi en ligning ved at trække samme tal fra begge sider. Hvis vi i stedet vil bruge solve, kan vi taste solve(*ym*+0.028· 180=16.2,*ym*) .

8. Bestem væksthastighed ud fra differentialligning. Eksempel 2.

Opgave

En plantes højde er en funktion af tiden der opfylder differentialligningen

$$\frac{dh}{dt} = 0{,}026 \cdot 0{,}93^t \cdot h$$

hvor h er højden målt i mm, og t er tidspunktet målt i døgn.
Det oplyses at $h(1) = 3$.

Bestem væksthastigheden til tidspunktet $t = 1$.

Besvarelse

Vi indsætter 1 for t og 3 for h i differentialligningen:

$$\frac{dh}{dt} = 0{,}026 \cdot 0{,}93^1 \cdot 3$$

$$\frac{dh}{dt} = 0{,}07254$$

Til tidspunktet $t = 1$ er væksthastigheden $\underline{\underline{0{,}073 \text{ mm pr. døgn}}}$.

9. Bestem løsningerne til en differentialligning.

Opgave

Bestem forskrift for løsningerne til differentialligningen $y' = y - 1{,}3$.

Besvarelse

Nspire løser ligningen mht. funktionen y og får løsningerne $\underline{\underline{y = c \cdot e^x + 1{,}3}}$.

Vi tastede deSolve(y'=y−1.3,x,y) .

I stedet for c skriver Nspire $c1$ eller $c2$ eller $c3$ osv.

Når vi i $y = c \cdot e^x + 1{,}3$ erstatter c med et bestemt tal, får vi én af løsningerne.

Hvis vi ved at $y(2) = 5$, dvs. at punktet $(2, 5)$ ligger på grafen, så kan vi bestemme c .
Dette kan vi gøre med metoden fra ramme 10, men vi kan også blot sætte 2 og 5 ind for x og y i $y = c \cdot e^x + 1{,}3$ og løse mht. c :

$$5 = c \cdot e^2 + 1{,}3 \qquad \text{hvoraf} \qquad c = \frac{3{,}7}{e^2} = 0{,}500741 \ .$$

Løsningen hvor $y(2) = 5$, er altså $y = 0{,}50 \cdot e^x + 1{,}3$.

10. Bestem en løsning til en differentialligning når én funktionsværdi (ét grafpunkt) er givet.

Opgave

En funktion h er løsning til differentialligningen

$$\frac{dh}{dx} = 0{,}25(h - x)$$

og grafen for h går gennem punktet $(2 , 1{,}6)$.

Bestem en forskrift for h.

Besvarelse

Nspire bestemmer forskriften for den løsning til $\frac{dh}{dx} = 0{,}25(h - x)$ hvor $h(2) = 1{,}6$ og får

$$\underline{\underline{h(x) \ = \ -2{,}67 \cdot 1{,}284^x + x + 4}}$$

Samme bogstav　　x før h

Vi tastede deSolve(h'=0.25·(h−x) and h(2)=1.6,x,h).

Samme bogstav

11. Bestem en løsning til en differentialligning når to funktionsværdier (to grafpunkter) er givet.

Opgave

En funktion p er løsning til differentialligningen

$$\frac{dp}{dt} = k - p \ .$$

Det oplyses at når $t = 0$ er $p = 2$, og at når $t = 1$ er $p = 1{,}5$.

Bestem en forskrift for p .

Besvarelse

Nspire bestemmer en forskrift for den løsning p til $\frac{dp}{dt} = k - p$ hvor $p(0) = 2$, og får

$$p(t) = (2-k)\cdot \mathrm{e}^{-t} + k$$

Da $p(1) = 1{,}5$, er $(2-k)\cdot \mathrm{e}^{-1} + k = 1{,}5$.

Nspire løser denne ligning mht. k og får $k = 1{,}21$.

Den søgte forskrift er altså $p(t) = (2-1{,}21)\cdot \mathrm{e}^{-t} + 1{,}21$, dvs.

$$\underline{\underline{p(t) \ = \ 0{,}79\cdot \mathrm{e}^{-t} + 1{,}21}} \ .$$

Brug to forskellige punkter (0 , 2) og (1 , 1,5)

Vi tastede $\text{deSolve}\left(p'=k-p \text{ and } p(0)=2,t,p\right)$ og $\text{solve}\left((2-k)\cdot \mathrm{e}^{-1}+k=1.5,k\right)$.

12. Opstil differentialligning. Eksempel 1.

Opgave

En samling celler deler sig sådan at samlingens vægt vokser med en hastighed der er proportional med samlingens vægt, og proportionalitetskonstanten er $0{,}02$. På et tidspunkt begynder samlingen at blive spist med en hastighed på 1,4 gram pr. døgn.

Indfør passende variable, og opstil en differentialligning der beskriver hvordan samlingens vægt nu ændrer sig med tiden.

Besvarelse

x = tiden målt i døgn. y = samlingens vægt målt i gram. Celledelingen får vægten til at stige med hastigheden $0{,}02y$ gram pr. døgn. Herfra skal trækkes 1,4 gram pr. døgn.

$$\underline{\underline{\frac{dy}{dx} = 0{,}02y - 1{,}4}}$$

13. Opstil differentialligning. Eksempel 2.

Opgave

I hvert punkt på grafen for en funktion f er der en tangent. Tangentens hældningskoefficient er proportional med punktets y-koordinat. Proportionalitetskonstanten er $0{,}8$.

Opstil en differentialligning der har f som løsning.

Besvarelse

Tangenthældningen $f'(x)$ i et grafpunkt $(x, f(x))$ er lig $0{,}8\cdot f(x)$, så f er løsning til differentialligningen

$$\underline{\underline{f'(x) = 0{,}8f(x)}}$$

14. Logistisk differentialligning

14a Vi opstiller en differentialligning

For en population af dyr er $N(t)$ antallet af dyr på tidspunktet t uger.

Det er oplyst at populationen vokser sådan at

(1) *væksthastigheden* er proportional med
produktet af antallet og differensen mellem 300 og antallet

Ud fra (1) kan vi opstille en differentialligning:

(2) $N' = k \cdot N \cdot (300 - N)$

N' = *væksthastigheden*
N = *antallet*
$300 - N$ = *differensen mellem 300 og antallet*

14b Vi finder proportionalitetskonstanten

Det er oplyst at

væksthastigheden er 20 på det tidspunkt hvor *antallet* er 100

dvs.

(3) $N' = 20$ når $N = 100$

Ud fra (2) og (3) kan vi finde proportionalitetskonstanten k:

$$20 = k \cdot 100 \cdot (300 - 100)$$

$$k = 0{,}001$$

Antallet $N(t)$ er altså en løsning til differentialligningen

(4) $N' = 0{,}001 \cdot N \cdot (300 - N)$

14c Hvad er en logistisk differentialligning?

Differentialligning (4) er af typen

$$y' = k \cdot y \cdot (M - y)$$

En differentialligning af denne type kaldes en logistisk differentialligning.

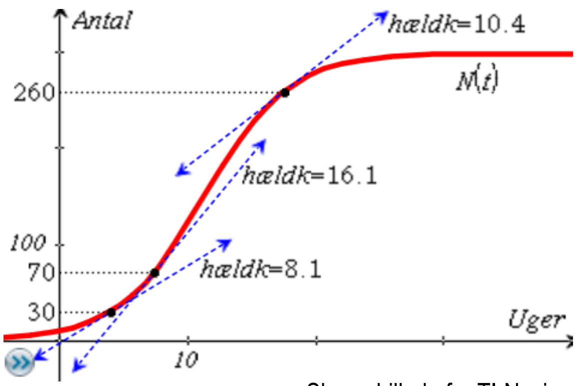
14d Hvordan ændres væksthastigheden?

Af (4) får vi:

Når $N = 30$ er $N' = 8{,}1$
Når $N = 70$ er $N' = 16{,}1$ Se figur

Når antallet er 70, så vokser det altså hurtigere end når det er 30.
Grunden er at

så længe der er god plads, gælder
at når der er flere dyr,
vil der komme flere unger.



Skærmbillede fra TI-Nspire

Af (4) får vi:

Når $N = 260$ er $N' = 10{,}4$ Se figur

Når antallet er 260, så vokser det altså langsommere end når det er 70. Grunden er at

når der er mange dyr, er der mindre plads pr. dyr,
og så kommer der ikke så mange unger.

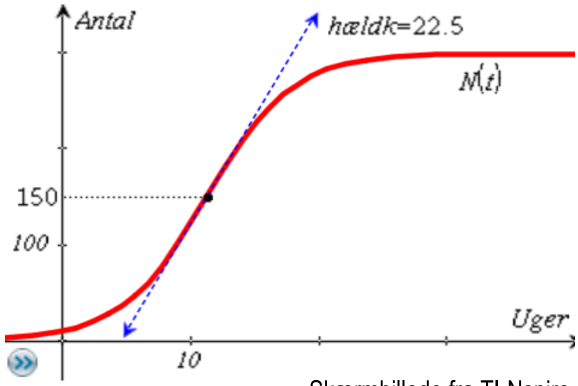
14e Hvor stor er populationen når den vokser hurtigst?

Vi vil finde ud af hvor stort antallet N er når væksthastigheden er størst. Vi skal altså finde ud af hvad N skal være for at følgende udtryk er størst:

$$hast(N) = 0{,}001 \cdot N \cdot (300 - N) = 0{,}3 \cdot N - 0{,}001 \cdot N^2$$

Vi får $hast'(N) = 0{,}3 - 0{,}002 \cdot N$ så $hast'(N) = 0$ netop når $N = 150$.

Da $hast'(100) = 0{,}1$ og $hast'(200) = -0{,}1$, er $hast$ voksende i intervallet $N \leq 150$ og aftagende i intervallet $150 \leq N$, så største væksthastighed er $hast(150) = 22{,}5$.



Skærmbillede fra TI-Nspire

Se figur

Når antallet af dyr er 150,
er væksthastigheden størst.
Den største væksthastighed er 22,5

14f Vi finder forskrifter for løsningerne til differentialligningen

I formelsamlingen står at funktionerne

(5) $\quad y = \dfrac{M}{1 + c \cdot e^{-kM \cdot t}}$ $\quad$ er løsning til $\quad y' = k \cdot y \cdot (M - y)$

Af (5) får vi at funktionerne

(6) $\quad N(t) = \dfrac{300}{1 + c \cdot e^{-0{,}3 \cdot t}}$ $\quad$ er løsning til $\quad N' = 0{,}001 \cdot N \cdot (300 - N)$

14g Vi finder den af løsningerne der passer med populationen

Det er oplyst at til tiden $t = 0$ er antallet $N = 10$.

Dette indsætter vi i (6) og får $\quad 10 = \dfrac{300}{1 + c \cdot e^{-0{,}3 \cdot 0}}$ $\quad$ dvs. $\quad 10 = \dfrac{300}{1 + c}$ $\quad$ så $\quad c = 29$.

Antallet af dyr er altså fastlagt ved

(7) $\quad N(t) = \dfrac{300}{1 + 29 \cdot e^{-0{,}3 \cdot t}}$

14h Hvad sker der med antallet i det lange løb?

Da $29 \cdot e^{-0{,}3 \cdot t}$ er eksponentielt aftagende, er

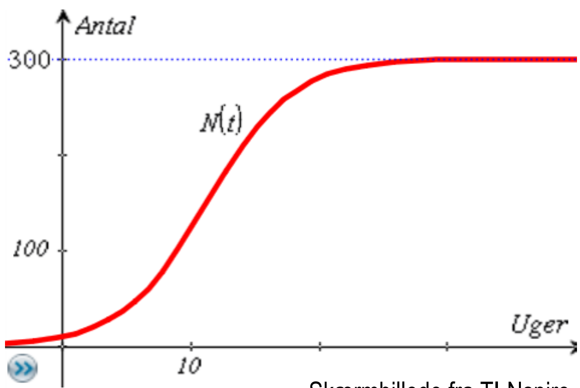
$$29 \cdot e^{-0{,}3 \cdot t} \approx 0 \quad \text{når } t \text{ er stor}$$

så af (7) ser vi at

$$N(t) \approx 300 \quad \text{når } t \text{ er stor}$$

Se figur

Altså er 300 den øvre grænse for hvor mange dyr der er plads til. Tallet 300 kaldes *bæreevnen*.



Skærmbillede fra TI-Nspire

For en logistisk funktion y hvor $y' = k \cdot y \cdot (M - y)$, er M den øvre grænse for y , og $\frac{M}{2}$ er størrelsen af y når y' er størst.

15. Beviser

<u>15a Hjælpesætning:</u> $\left(\mathrm{e}^{kx}\right)' = k\,\mathrm{e}^{kx}$

<u>Bevis:</u> For e^{kx} er den ydre funktion $\mathrm{e}^{(\;)}$, og den indre er kx.
Differentialkvotienten af den ydre er $\mathrm{e}^{(\;)}$, og differentialkvotienten af den indre er k,
så differentialkvotienten af den sammensatte funktion er $\left(\mathrm{e}^{kx}\right)' = \mathrm{e}^{(kx)}\cdot k = k\,\mathrm{e}^{kx}$.

<u>15b Sætning</u>

Løsningerne til differentialligningen

$$y' = k\,y$$

er funktionerne

$$y(x) = c\,\mathrm{e}^{kx}$$

Bemærk at

på k's plads i denne forskrift skal stå det tal der står på k's plads i differentialligningen

og at

uanset hvilket tal vi skriver på c's plads, så får vi en løsning.
Det er altså uendelig mange løsninger.

<u>1. del af beviset</u> for sætningen

For en funktion $y(x)$ med egenskaben $y' = k\,y$ er

$$\begin{aligned}
\left(y\cdot\mathrm{e}^{-kx}\right)' &= y'\cdot\mathrm{e}^{-kx} + y\cdot\left(-k\,\mathrm{e}^{-kx}\right) && \text{regel for at differentiere produkt}\\
&= k\,y\cdot\mathrm{e}^{-kx} + y\cdot\left(-k\,\mathrm{e}^{-kx}\right) && \text{da vi forudsatte at } y' = k\,y\\
&= 0
\end{aligned}$$

Da $y\cdot\mathrm{e}^{-kx}$ differentieret giver 0, må $y\cdot\mathrm{e}^{-kx}$ være lig en konstant:

$$y\cdot\mathrm{e}^{-kx} = c$$

Vi ganger begge denne lignings sider med e^{kx} og får

$$y = c\,\mathrm{e}^{kx}$$

da $\mathrm{e}^{-kx}\cdot\mathrm{e}^{kx} = \mathrm{e}^{-kx+kx} = \mathrm{e}^{0} = 1$.

<u>Konklusion:</u> Hvis en funktion $y(x)$ har egenskaben $y' = k\,y$
så har denne funktion en forskrift af typen
$y(x) = c\,\mathrm{e}^{kx}$ hvor c er et tal.

<u>2. del af beviset</u> for sætningen

Vi indsætter $c\,\mathrm{e}^{kx}$ for y i ligningen $y' = k\,y$ og får

$$\left(c\,\mathrm{e}^{kx}\right)' = k\,c\,\mathrm{e}^{kx}$$

Venstre side af ligningen giver $c\,k\,\mathrm{e}^{kx}$. Ligningen passer.

<u>Konklusion:</u> Funktionerne $y(x) = c\,\mathrm{e}^{kx}$ har egenskaben $y' = k\,y$.