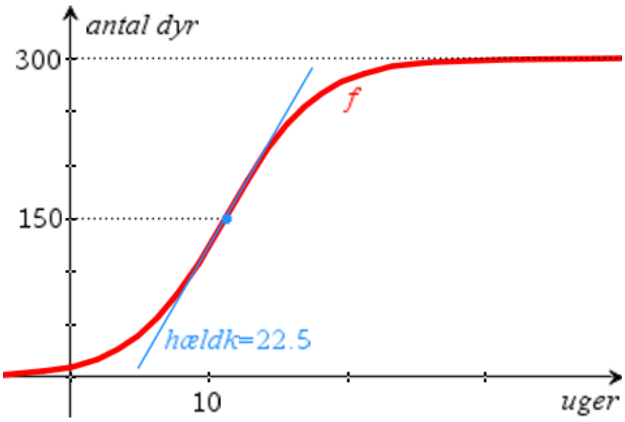
Differential-ligninger

for A-niveau i stx, udgave 5



Skærmbillede fra TI-Nspire

2017 Karsten Juul

1. Hvad er en differentialligning?

2. Kontrol af løsning til differentialligning

3. Bruge oplysningen i differentialligning

4. Bestemme løsning til differentialligning

5. Opstille differentialligning

6. Logistisk differentialligning

7. Beviser

Foregående version af dette hæfte har skiftet adresse til
http://mat1.dk/differentialligninger_for_a_niveau_i_stx_udgave_4.pdf

1. Hvad er en differentialligning?

1a. Indledning til differentialligninger.

1b. Oplæg

En plantes højde y vokser sådan at der på ethvert tidspunkt t gælder at

højdes væksthastighed = højde

Dette kan vi skrive med symboler sådan:

$y' = y$ ← Her har vi opstillet en differentialligning.

Vi kan også udtrykke dette ved at sige at i hvert punkt på grafen er

tangenthældning = y-koordinat

Ligningen $y' = y$ er et eksempel på en differentialligning. De fleste differentialligninger er mere indviklede.

1c. Sprogbrug

For funktionen $f(x) = 4e^x$ gælder at $f'(x) = 4e^x$, så

$f(x)$ opfylder betingelsen $y' = y$ for hvert x.

Dette udtrykker vi ved at sige at

$f(x)$ er en løsning til differentialligningen

eller at

$f(x)$ tilfredsstiller differentialligningen

1d. Mange løsninger

Vi ser at funktionen $f(x) = -e^x$ også er en løsning.

Vi ser at differentialligningen har mange løsninger.

1e. Skrivemåder

Symbolet $\frac{dy}{dx}$ betyder det samme som y'.

Differentialligningen

$y' = y$

kan også skrives sådan:

$\frac{dy}{dx} = y$

eller sådan:

$f'(x) = f(x)$.

1f. Hvad er en differentialligning?

En ligning er en differentialligning hvis

den ubekendte er en funktion

og

funktionens differentialkvotient indgår

En funktion er løsning til en differentialligning hvis

funktionen opfylder differentialligningen for hvert x i funktionens definitionsmængde.

2. Kontrol af løsning til differentialligning

2a. Undersøg om funktion er løsning til differentialligning. Gør rede for at funktion er løsning til differentialligning. Eksempel 1.

Opgave

Forskriften fortæller at i hvert grafpunkt får man *y*-koordinat ved at opløfte x-koordinat til anden og lægge x-koordinat til resultatet.

Undersøg om funktionen $f(x) = x^2 + x$ er en løsning til differentialligningen

$$y' - 2y = 1 - 2x^2 \ .$$

Ligningen kræver for hvert grafpunkt at når
y-koordinat gange 2 trækkes fra tangenthældning
skal det give samme tal som når
x-koordinat i anden gange 2 trækkes fra 1.

Besvarelse

Vi indsætter $f(x) = x^2 + x$ for y i $y' - 2y = 1 - 2x^2$:

$$(x^2 + x)' - 2(x^2 + x) = 1 - 2x^2$$

$$2x + 1 - (2x^2 + 2x) = 1 - 2x^2$$

$$2x + 1 - 2x^2 - 2x = 1 - 2x^2$$

$$1 - 2x^2 = 1 - 2x^2$$

Da dette er sandt, gælder: $\underline{\underline{f \text{ er løsning}}}$ til differentialligningen $y' - 2y = 1 - 2x^2$.

2b. Undersøg om funktion er løsning til differentialligning. Gør rede for at funktion er løsning til differentialligning. Eksempel 2.

Opgave

Forskriften fortæller at i hvert grafpunkt får man *y*-koordinat ved at indsætte *x*-koordinat i forskrift og regne ud.

Undersøg om funktionen $f(x) = x^2 \cdot \ln x + x$ er en løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} + x - 1 .$$

Ligningen kræver for hvert grafpunkt at
tangenthældning
skal være det tal man får når man
indsætter *x*-koordinat og *y*-koordinat i højre side og regner ud

Besvarelse

Vi indsætter $f(x) = x^2 \cdot \ln x + x$ for y i $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} + x - 1$:

$$(x^2 \cdot \ln x + x)' = \frac{2(x^2 \cdot \ln x + x)}{x} + x - 1$$

$$2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} + 1 = \frac{2x(x \cdot \ln x + 1)}{x} + x - 1$$

$$2x \cdot \ln x + x + 1 = 2(x \cdot \ln x + 1) + x - 1$$

$$2x \cdot \ln x + x + 1 = 2x \cdot \ln x + 2 + x - 1$$

$$2x \cdot \ln x + x + 1 = 2x \cdot \ln x + x + 1$$

Da dette er sandt, gælder: $\underline{\underline{f \text{ er løsning}}}$ til differentialligningen $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} + x - 1$.

3. Bruge oplysningen i differentialligning

3a. Bestem tangenthældning ud fra differentialligning.

Opgave En funktion f er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - y$$

Punktet $(3,7)$ ligger på grafen for f.
Bestem tangenthældningen a i dette punkt.

Ligningen fortæller at i ethvert grafpunkt får vi tangenthældningen $\frac{dy}{dx}$ når vi opløfter x-koordinaten til anden og trækker y-koordinaten fra resultatet.

Besvarelse I ethvert punkt (x,y) på grafen for f er

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - y \qquad \text{hvor } \frac{dy}{dx} \text{ er tangenthældningen i punktet.}$$

så $a = 3^2 - 7$ når a er tangenthælningen i punktet $(3,7)$ på grafen,

dvs. $a = 2$.

Hvis der kun indgår ét af bogstaverne *x* og *y*, så skal vi kun bruge et af tallene 3 og 7.

3b. Bestem *y*-koordinat ud fra differentialligning **når tangenthældning er kendt.**

Er tangenthældning ikke kendt, så se 4g.

Opgave En funktion f er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - y$$

Punktet $(3,y_0)$ ligger på grafen for f,
og tangenthældningen i dette punkt er 2 .
Bestem *y*-koordinaten y_0 til dette punkt.

Ligningen fortæller at i ethvert grafpunkt får vi tangenthældningen $\frac{dy}{dx}$ når vi opløfter x-koordinaten til anden og trækker y-koordinaten fra resultatet.

Besvarelse I ethvert punkt (x,y) på grafen for f er

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - y \qquad \text{hvor } \frac{dy}{dx} \text{ er tangenthældningen i punktet.}$$

så $2 = 3^2 - y_0$ når 2 er tangenthælningen i punktet $(3,y_0)$ på grafen,

dvs. $y_0 = 7$.

Hvis ligningen f.eks. var $\frac{dy}{dx} = 5 - 2y$, så skulle vi ikke bruge x-koordinaten 3.

3c. Bestem *x*-koordinat ud fra differentialligning **når tangenthældning er kendt.**

Er tangenthældning ikke kendt, så se 4h.

Opgave En funktion f er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - y$$

Punktet $(x_0,7)$ ligger på grafen for f,
og tangenthældningen i dette punkt er 2 .
Bestem *x*-koordinaten x_0 til dette punkt.

Ligningen fortæller at i ethvert grafpunkt får vi tangenthældningen $\frac{dy}{dx}$ når vi opløfter x-koordinaten til anden og trækker y-koordinaten fra resultatet.

Besvarelse I ethvert punkt (x,y) på grafen for f er

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - y \qquad \text{hvor } \frac{dy}{dx} \text{ er tangenthældningen i punktet.}$$

så $2 = x_0^2 - 7$ når 2 er tangenthælningen i punktet $(x_0,7)$ på grafen,

dvs. $x_0 = 3$.

3d. Bestem ligning for tangent når differentialligning er givet.

I en opgave står:

En funktion f er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - y$$

Ligningen fortæller at i ethvert grafpunkt får vi tangenthældningen $\frac{dy}{dx}$ når vi opløfter x-koordinaten til anden og trækker y-koordinaten fra resultatet.

Desuden er oplyst to af de tre tal a, x_1 og y_1 som indgår i ligningen $y = a\cdot(x-x_1) + y_1$ for tangenten.

Find ligningen for tangenten.

METODE: Brug den relevante af metoderne fra ramme 3a, 3b og 3c til at finde det af tallene a, x_1 og y_1 som ikke er oplyst, og sæt de tre tal ind i ligningen $y = a\cdot(x-x_1) + y_1$.

Hvis de oplyste tal er $x_1 = 3$ og $y_1 = 7$, så kan besvarelsen se sådan ud:

Besvarelse

For en løsning til differentialligningen

$$\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}} = \boldsymbol{x^2 - y}$$

gælder at i punktet $(x_1, y_1) = (3,7)$ er tangenthældningen

$$a = \frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}} = \mathbf{3^2 - 7} = 2$$

(Vi har indsat 3 og 7 for x og y i højre side af $\frac{dy}{dx} = x^2 - y$).

Ligning for tangent i $P(3,7)$:

$$y = a(x - x_1) + y_1$$

$$y = 2(x-3) + 7$$

$$\underline{\underline{y = 2x + 1}}$$

3e. Eksempel på brug af oplysningen i differentialligningen.

Opgave

En funktion f er defineret for ethvert tal x og er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+1}{y^2+1} \ .$$

Ligningen fortæller at i ethvert grafpunkt er tangenthældningen $\frac{dy}{dx}$ det tal vi får ved at udregne højresiden efter at have indsat grafpunktets koordinater.

Gør rede for at f har et minimum.

Besvarelse

f er løsning til differentialligningen $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+1}{y^2+1}$, så

i ethvert punkt (x, y) på grafen for f er tangenthældningen $\frac{2x+1}{y^2+1}$.

Dette tal har samme fortegn som $2x+1$,

for y^2+1 er altid positivt da et tal i anden ikke kan være negativt.

$2x+1=0$ har løsningen $x = -\frac{1}{2}$.

For $x=-1$ er $2x+1=-1$, og for $x=0$ er $2x+1=1$.

Tangenthældningen er altså negativ for $x < -\frac{1}{2}$ og positiv for $-\frac{1}{2} < x$, så

f er aftagende i intervallet $x \le -\frac{1}{2}$ og voksende i intervallet $-\frac{1}{2} \le x$.

Heraf følger at f har minimum for $x = -\frac{1}{2}$.

3f. Bestem væksthastighed ud fra differentialligning. Eksempel 1.

Opgave

Udviklingen i et dyrs vægt kan beskrives ved differentialligningen

$$\frac{dy}{dt}+0{,}028y=16{,}2 \quad , \qquad 0\le t\le 9$$

hvor t er tiden målt i uger, og y er dyrets vægt målt i gram.

Ligningen fortæller at på ethvert tidspunkt mellem 0 og 9 gælder:
Når væksthastigheden $\frac{dy}{dt}$ lægges sammen med 0,028 gange vægten, så får man 16,2.

Bestem væksthastigheden på det tidspunkt hvor dyrets vægt er 180 gram.

Besvarelse med ligningsregel

For dyrets vægt y (gram) som funktion af tiden t (uger) er $\frac{dy}{dt}+0{,}028y=16{,}2 \quad , \qquad 0\le t\le 9$

Vi indsætter 180 for y i differentialligningen:

$$\frac{dy}{dt}+0{,}028\cdot 180=16{,}2$$

Når vi indsætter en konstant for y, så skal vi bevare y i dy.

$$\frac{dy}{dt}= 16.2-0.028\cdot 180$$

$$\frac{dy}{dt}= 11.16$$

Når dyrets vægt er 180 gram, er væksthastigheden 11,2 gram pr. uge .

Besvarelse med solve

For dyrets vægt y (gram) som funktion af tiden t (uger) er $\frac{dy}{dt}+0{,}028y=16{,}2 \quad , \qquad 0\le t\le 9$

Vi indsætter 180 for y i differentialligningen. Når vi indsætter en konstant for y, så skal vi bevare y i dy.

Nspire løser ligningen $\frac{dy}{dt}+0{,}028\cdot 180=16{,}2$ mht. $\frac{dy}{dt}$ og får $\frac{dy}{dt}=11{,}16$.

$\text{solve}(ym+0.028\cdot 180=16.2,ym) \blacktriangleright ym=11.16$

Når dyrets vægt er 180 gram, er væksthastigheden 11,2 gram pr. uge .

3g. Bestem væksthastighed ud fra differentialligning. Eksempel 2.

Opgave

En plantes højde er en funktion af tiden der opfylder differentialligningen

$$\frac{dh}{dt}=0{,}026\cdot 0{,}93^t\cdot h$$

Ligningen fortæller at vi får væksthastigheden $\frac{dh}{dt}$ når vi udregner højre side efter at have indsat tidspunkt og højde på t's og h's pladser.

hvor h er højden målt i mm, og t er tidspunktet målt i døgn.
Det oplyses at $h(1)=3$.

Bestem væksthastigheden til tidspunktet $t=1$.

Besvarelse

For plantes højde h (mm) som funktion af tiden t (døgn) er $\frac{dh}{dt}=0{,}026\cdot 0{,}93^t\cdot h$.

Vi indsætter 1 for t og 3 for h i differentialligningen:

$$\frac{dh}{dt}= 0.026\cdot (0.93)^1\cdot 3$$

$$\frac{dh}{dt}= 0.07254$$

Til tidspunktet $t=1$ er væksthastigheden 0,073 mm pr. døgn .

3h. Bestem størrelsen af y ud fra differentialligning **når væksthastigheden er kendt.**

Er væksthastighed ikke kendt, så se 4g.

Opgave

En plantes højde er en funktion af tiden der opfylder differentialligningen

$$\frac{dh}{dt} = 0{,}026 \cdot 0{,}93^t \cdot h$$

Ligningen fortæller at vi får væksthastigheden $\frac{dh}{dt}$ når vi udregner højre side efter at have indsat tidspunkt og højde på t's og h's pladser.

hvor h er højden målt i mm, og t er tidspunktet målt i døgn.
På tidspunktet $t = 2$ er højdens væksthastighed 0,10 mm pr. døgn.

Bestem højden til tidspunktet $t = 2$.

Besvarelse

På ethvert tidspunkt t (døgn) er

$$\frac{dh}{dt} = 0{,}026 \cdot 0{,}93^t \cdot h$$ hvor h er højden i mm, og $\frac{dh}{dt}$ er højdens væksthastighed.

Vi indsætter 2 for t og 0,10 for $\frac{dh}{dt}$ i denne differentialligning:

Hvis t ikke indgår i ligningen, så skal tallet 2 ikke bruges i udregningen.

$$010 = 0{,}026 \cdot 0{,}93^2 \cdot h$$

Vi løser denne ligning mht. h og får

$$h = 4{,}44693$$

Vis hvordan ligningen løses. Hvis den løses ved omformning, kan det man skal gøre, være meget forskellig i forskellige opgaver af denne type.

Til tidspunktet $t = 2$ er højden 4,4 mm .

3i. Bestem tidspunktet ud fra differentialligning **når væksthastigheden er kendt.**

Er væksthastighed ikke kendt, så se 4h.

Opgave

En plantes højde er en funktion af tiden der opfylder differentialligningen

$$\frac{dh}{dt} = 0{,}026 \cdot 0{,}93^t \cdot h$$

Ligningen fortæller at vi får væksthastigheden $\frac{dh}{dt}$ når vi udregner højre side efter at have indsat tidspunkt og højde på t's og h's pladser.

hvor h er højden målt i mm, og t er tidspunktet målt i døgn.
På et tidspunkt er højden 5,2 mm og væksthastigheden 0,11 mm pr. døgn.

Bestem dette tidspunkt t .

Besvarelse

På ethvert tidspunkt t (døgn) er

$$\frac{dh}{dt} = 0{,}026 \cdot 0{,}93^t \cdot h$$ hvor h er højden i mm, og $\frac{dh}{dt}$ er højdens væksthastighed.

Vi indsætter 5,2 for h og 0,11 for $\frac{dh}{dt}$ i denne differentialligning:

Hvis h ikke indgår i ligningen, så skal tallet 5,2 ikke bruges i udregningen.

$$0{,}11 = 0{,}026 \cdot 0{,}93^t \cdot 5{,}2$$

Vi løser denne ligning mht. t og får

$$t = 2{,}8424$$

Vis hvordan ligningen løses. Hvis den løses ved omformning, kan det man skal gøre, være meget forskelligt i forskellige opgaver af denne type.

Det er på tidspunktet $t =$ 2,8 at højden er 5,2 mm og væksthastigheden er 0,11 mm pr. døgn.

4. Bestemme løsning til differentialligning

4a. Bestem løsningerne til en differentialligning.

4b. Opgave Bestem forskrift for løsningerne til differentialligningen $y' = y - 1{,}3$.

Besvarelse Nspire løser ligningen $y' = y - 1{,}3$ mht. funktionen y og får løsningerne $\underline{\underline{y = c \cdot e^x + 1{,}3}}$.

$$\text{deSolve}(y'=y-1.3,x,y) \blacktriangleright y=c1\cdot e^x+1.3$$

I kommandoen **deSolve** står **de** for **d**ifferential **e**quation.

Bemærkning I stedet for c skriver Nspire $c1$ eller $c2$ eller $c3$ osv.

4c. De enkelte løsninger

I besvarelsen ovenfor fandt vi at løsningerne til $y' = y - 1{,}3$ er $y = c \cdot e^x + 1{,}3$.

Når vi i $y = c \cdot e^x + 1{,}3$ erstatter c med et bestemt tal, får vi én af løsningerne.

Hvis vi ved at $y(2) = 5$, dvs. at punktet $(2, 5)$ ligger på grafen, så kan vi bestemme c .
Dette kan vi gøre med metoden fra ramme 4d, men vi kan også blot sætte 2 og 5 ind for x og y i $y = c \cdot e^x + 1{,}3$ og løse mht. c :

$$5 = c \cdot e^2 + 1{,}3 \qquad \text{hvoraf} \qquad c = \frac{5 - 1{,}3}{e^2} = 0{,}500741 \quad .$$

Løsningen hvor $y(2) = 5$, er altså $y = 0{,}50 \cdot e^x + 1{,}3$. På tilsvarende måde får vi:

Løsningen hvor $y(2) = 3$, er $y = 0{,}23 \cdot e^x + 1{,}3$.

4d. Bestem en løsning til en differentialligning når én funktionsværdi (ét grafpunkt) er givet.

Opgave En funktion h er løsning til differentialligningen $\frac{dh}{dx} = 0{,}25(h - x)$

og grafen for h går gennem punktet $(2\,,1{,}6)$. Bestem en forskrift for h .

Besvarelse Nspire bestemmer forskriften for den løsning til $\frac{dh}{dx} = 0{,}25(h - x)$ hvor $h(2) = 1{,}6$ og får

$$\underline{\underline{h(x) = -2{,}67 \cdot 1{,}284^x + x + 4}}$$

Samme bogstav

x før *h*

$$\text{deSolve}(h'=0.25\cdot(h-x) \text{ and } h(2)=1.6,x,h) \blacktriangleright h=-2.66873\cdot(1.28403)^x+x+4.$$

Samme bogstav

I stedet kunne vi have startet med at finde alle løsninger (se 4b).
Derefter kunne vi have bestemt den af løsningerne hvor $h(2)=1{,}6$ (se 4c).

Måske skal du selv isolere *y* og/eller *x*

Her har **deSolve** ikke isoleret *y*: $\text{deSolve}(y'=y^3 \text{ and } y(1)=2,x,y) \blacktriangleright \frac{1}{8}-\frac{1}{2\cdot y^2}=x-1$

Vi får **solve** til at gøre det: $\text{solve}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{2\cdot y^2}=x-1,y\right) \blacktriangleright y=2\cdot\sqrt{\frac{-1}{8\cdot x-9}} \text{ and } \frac{1}{8\cdot x-9}\le 0 \text{ or } y=-2\cdot\sqrt{\frac{-1}{8\cdot x-9}} \text{ and } \frac{1}{8\cdot x-9}\le 0$

solve har ikke isoleret *x* i uligheden der angiver løsningens definitionsmængde.

Vi får solve til at gøre det: $\text{solve}\left(\frac{1}{8\cdot x-9}\le 0,x\right) \blacktriangleright x<\frac{9}{8}$

Differentialligningen stammer fra en opgave hvor *x* og *y* er positive, så løsningen er:

$$y = 2\cdot\sqrt{\frac{-1}{8\cdot x-9}} \quad , \quad 0 < x < \frac{9}{8}$$

4e. Løs differentialligning når to grafpunkter er givet.

Opgave En funktion p er løsning til differentialligningen $\frac{dp}{dt} = k - p$.

Det oplyses at når $t = 0$ er $p = 2$, og at når $t = 1$ er $p = 1{,}5$.

Bestem en forskrift for p .

BEMÆRK: I deSolve bruger vi kun det ene af de to oplyste grafpunkter.
Når vi har fundet forskriften, bruger vi det andet punkt til at bestemme k .

Besvarelse

Nspire bestemmer en forskrift for den løsning p til $\frac{dp}{dt} = k - p$ hvor $p(0) = 2$, og får

$p(t) = (2-k)\cdot \mathrm{e}^{-t} + k$

Da $p(1) = 1{,}5$, er $(2-k)\cdot \mathrm{e}^{-1} + k = 1{,}5$.

Nspire løser ligningen $(2-k)\cdot \mathrm{e}^{-1} + k = 1{,}5$ mht. k og får $k = 1{,}21$.

Den søgte forskrift er altså $p(t) = (2-1{,}21)\cdot \mathrm{e}^{-t} + 1{,}21$, dvs.

Brug to ~~forskellige~~ punkter $(0\,,\,2)$ og $(1\,,\,1{,}5)$.

$\underline{\underline{p(t) = 0{,}79\cdot \mathrm{e}^{-t} + 1{,}21}}$.

deSolve$(p'=k-p \text{ and } p(0)=2,t,p)$ ▸ $p=(2-k)\cdot \mathbf{e}^{-t}+k$ solve$((2-k)\cdot \mathbf{e}^{-1}+k=1.5,k)$ ▸ $k=1.20901$

4f. Måske skal du selv indse at du skal løse differentialligningen.

Opgave Udviklingen i en væskes temperatur beskrives ved differentialligningen

$$\frac{dp}{dt} = k - p \;.$$

Der står ikke at du skal løse differentialligningen, men du er nødt til det da du skal bruge forskriften til at finde k .

hvor p er temperatur i °C. Tiden t måles i minutter. Til tidspunktet $t = 0$ er temperaturen 2 °C.
Efter 1 minut er temperaturen 1,5 °C. Bestem konstanten k.

Besvarelse Nspire bestemmer en forskrift for den løsning p til $\frac{dp}{dt} = k - p$ hvor $p(0) = 2$, og får

$p(t) = (2-k)\cdot \mathrm{e}^{-t} + k$

Da $p(1) = 1{,}5$, er $(2-k)\cdot \mathrm{e}^{-1} + k = 1{,}5$. deSolve$(p'=k-p \text{ and } p(0)=2,t,p)$ ▸ $p=(2-k)\cdot \mathbf{e}^{-t}+k$

Nspire løser ligningen $(2-k)\cdot \mathrm{e}^{-1} + k = 1{,}5$ mht. k og får $\underline{\underline{k = 1{,}21}}$. solve$((2-k)\cdot \mathbf{e}^{-1}+k=1.5,k)$ ▸ $k=1.20901$

4g. Bestem *y*-koordinat (størrelse) ud fra differentialligning **når tangenthældning (væksthastighed) IKKE er kendt.**

Er tangenthældning kendt, så se 3b og 3h.

Opgave En funktion h er løsning til differentialligningen $\frac{dh}{dx} = 0{,}25(h - x)$

og grafen for h går gennem punktet $(2\,,\,1{,}6)$.

Bestem y-koordinaten til det punkt på h-grafen hvis x-koordinat er 3 .

Besvarelse Bestem forskriften for h med metoden fra 4d. Brug så forskriften til at finde svaret.

4h. Bestem *x*-koordinat (tidspunkt) ud fra differentialligning **når tangenthældning (væksthastighed) IKKE er kendt.**

Er tangenthældning kendt, så se 3c og 3i.

Opgave En funktion h er løsning til differentialligningen $\frac{dh}{dx} = 0{,}25(h - x)$

og grafen for h går gennem punktet $(2\,,\,1{,}6)$.

Bestem x-koordinaterne til de punkter på h-grafen hvis y-koordinat er $1{,}2$.

Besvarelse Bestem forskriften for h med metoden fra 4d. Brug så forskriften til at finde svaret.

5. Opstille differentialligning.

5a. Proportional

Hvad betyder ordene **proportional** og **proportionalitetskonstant** ?

Det forklarer vi med nedenstående eksempler.

I denne ramme repeteres begrebet "proportional". Grunden hertil er at der i flere af de følgende rammer er valgt et eksempel hvor ordet indgår. Begrebet proportional har ikke i sig selv noget at gøre med differentialligninger.

Eksempel: For en bestemt plantes blade gælder:

længde er proportional med bredde

og **proportionalitetskonstant er 5** .

Dette betyder: når man ganger bredde med 5, så får man længde.

Dvs. hvis bredde b er 3 , så er længde l lig $5 \cdot 3$ altså 15 . Uanset hvad b er , så er

$\boldsymbol{l = 5 \cdot b}$.

Eksempel: For nogle figurer gælder:

højde $\boldsymbol{h}$ er proportional med diameter $\boldsymbol{d}$.

Dvs. $\boldsymbol{h = c \cdot d}$

hvor c er samme tal uanset hvilket tal der indsættes for d .

Konstanten c er **proportionalitetskonstanten** .

5b. Opgave

For en fuglesygdom gælder i en periode at

Væksthastigheden for antal syge er proportional med antal syge.

Opstil en differentialligning der beskriver udviklingen i antal syge.

Besvarelse

y = antal syge efter t dage.

Så er y' = væksthastigheden for antal syge

Udviklingen kan beskrives ved differentialligningen

$y' = k \cdot y$, hvor k er en konstant.

Bemærkning

Vi kunne også have skrevet differentialligningen sådan:

$\frac{dy}{dt} = k \cdot y$, hvor k er en konstant.

Vi kunne have brugt et andet bogstav end y . Hvis S = antal syge:

$S' = k \cdot S$ eller $\frac{dS}{dt} = k \cdot S$, hvor k er en konstant.

Hvis $f(t)$ = antal syge:

$f'(t) = k \cdot f(t)$, hvor k er en konstant.

5c. Opgave

For en funktion f gælder om grafen at

tangenthældning er proportional med røringspunkts y-koordinat.

Proportionalitetskonstanten er 0,2 .

Opstil en differentialligning der har f som løsning.

Besvarelse

I punkt med y-koordinat $f(x)$ er tangenthældning $f'(x)$.

For f-graf er oplyst at

tangenthældning er proportional med røringspunkts y-koordinat,

og proportionalitetskonstant er 0,2 .

så f er løsning til differentialligningen

$f'(x) = 0{,}2 \cdot f(x)$.

5d. Opgave

$f(t)$ er grøftens længde (meter) efter t arbejdstimer.

Længden vokser med hastigheden 1,6 meter pr. arbejdstime.

Opstil en differentialligning der beskriver udviklingen i grøftens længde.

Besvarelse

$f(t)$ er grøftens længde (meter) efter t arbejdstimer.

Længden vokser med hastigheden 1,6 meter pr. arbejdstime.
Væksthastigheden er $f'(t)$, så

$$f'(t) = 1{,}6 \ .$$

Denne differentialligning beskriver udviklingen i grøftens længde.

5e. Opgave

I et område gælder at når man ser bort fra indvandringen, så vokser antal indbyggere med en hastighed der er proportional med antallet af indbyggere. Indvandringen sker med en hastighed på 1400 pr. år. Opstil en differentialligning der beskriver udviklingen i befolkningstallet.

Besvarelse

y = antal indbyggere. Så er y' = væksthastigheden for antal indbyggere.
Bortset fra indvandring, vokser antal indbyggere med en hastighed der er proportional med antal indbyggere. Indvandring sker med hastigheden 1400 pr. år. Så
Udviklingen i befolkningstallet kan derfor beskrives med differentilligningen

$$y' = c \cdot y + 1400 \ , \quad \text{hvor } c \text{ er en konstant.}$$

5f. Opgave

På en skærm er et stort kvadrat med areal 500 . Inden i det store kvadrat er et lille kvadrat med siden s. Den hastighed hvormed det lille kvadrats side vokser på tidspunktet t, er proportional med forskellen på det store kvadrats areal og det lille kvadrats areal. Proportionalitetskonstanten er 0,00792 .
Opstil en differentialligning der har $s(t)$ som løsning.

Besvarelse

$\boldsymbol{s}$ = lille kvadrats side $\quad \boldsymbol{500-s^2}$ = forskel på stort og lille kvadrats areal

$\boldsymbol{s'}$ = hastighed hvormed s vokser

s' er proportional med forskel, dvs. s' er kostant gange forskel .

Konstanten er 0,00792 , så $s' = 0{,}00792 \cdot (500-s^2)$.

Jeg har brugt farver til at pege på det der er det samme. Du skal ikke bruge farver til eksamen.

Differentialligningen som har $s(t)$ som løsning, kan skrives på flere måder, **f.eks**.

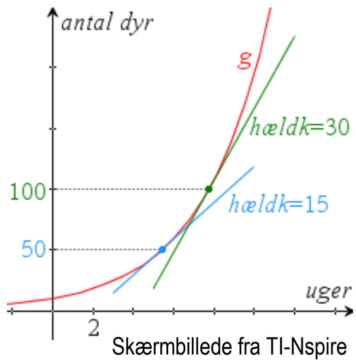
$s' = 0{,}00792 \cdot (500-s^2)$ **eller** $s'(t) = 0{,}00792 \cdot (500-s(t)^2)$ **eller** $\dfrac{ds}{dt} = 0{,}00792 \cdot (500-s^2)$

Til eksamen skal du kun skrive én af de tre ligninger.

6. Logistisk differentialligning

6a. Eksponentiel vækst.

Eksponentiel vækst er IKKE et eksempel på logistisk vækst!



Skærmbillede fra TI-Nspire

Eksempel: En population vokser ofte eksponentielt, dvs. sådan at

når antal individer y er større, så kommer der tilsvarende flere unger,

Så er væksthastigheden y' proportional med antallet y , dvs. $y' = k \cdot y$.

Generelt: En størrelse y kan ændres sådan at

(1) størrelsens **væksthastighed** er proportional med **størrelsen** .

Med symboler kan dette skrives sådan:

(2) $y' = k \cdot y$

Løsningerne til differentialligningen **(2)** er funktionerne

(3) $y(x) = c\,\mathrm{e}^{kx}$

På k's plads i denne forskrift skal stå det tal der står på k's plads i differentialligningen. Uanset hvilket tal vi skriver på c's plads, så får vi en løsning. Der er altså uendelig mange løsninger.

BEVIS for dette står i 7b.

Den røde graf viser udviklingen i antal dyr for en population der opfylder **(1)** . y' = hældningskoefficient = væksthastighed .

Ligningen **(2)** er et eksempel på en differentialligning, dvs.
den ubekendte er en funktion, og
funktionens differentialkvotient indgår.

En funktionen er en løsning til differentialligningen hvis den opfylder ligningen for hvert x i sin definitionsmængde.

6b. Logistisk vækst.

Eksempel: Når en population bliver større, vil væksthastighed ofte blive mindre fordi der er mindre plads.

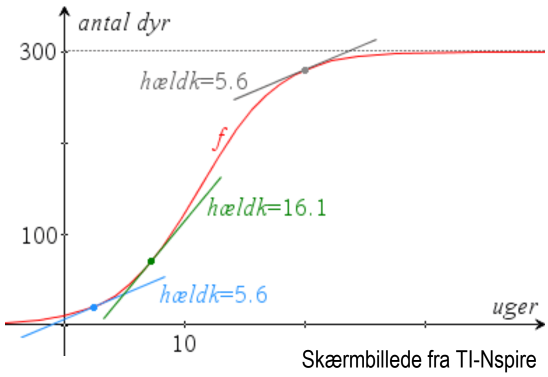
Generelt: Den logistiske ligning (= logistiske differentialligning) er følgende:

(4) $y' = k \cdot y \cdot (M-y)$, $k>0$, $M>0$.

For $0<y<M$ er løsningerne

(5) $y = \dfrac{M}{1+c\cdot \mathrm{e}^{-kM\cdot t}}$, $c>0$.

Når vi udskifter c med et nyt tal, får vi en ny løsning.



Skærmbillede fra TI-Nspire

Ligningen **(4)** udtrykker at

Størrelsens **væksthastighed** er proportional med **størrelsen** og med **størrelsens afstand til M** .

Den røde graf viser udviklingen i antal dyr for en population der opfylder **(4)** . y' = hældningskoefficient = væksthastighed .

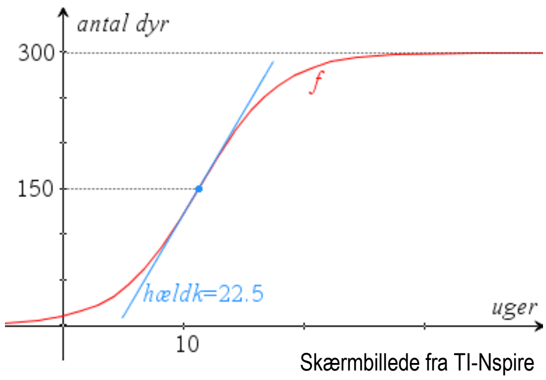
Når en størrelse y hvor $0<y<M$, vokser sådan at
$y' = k\cdot y\cdot(M-y)$, $k>0$, $M>0$,
så gælder:

(7) Den øvre grænse for størrelsen er $y = M$.

(8) Væksthastighed er størst når størrelsen er $y = \dfrac{M}{2}$.

Tallet M kaldes bæreevnen .

På figuren er $M = 300$.



Skærmbillede fra TI-Nspire

6c. Bestem forskrift for størrelsen.

Opgave Et dyrs vægt m (gram) som funktion af tiden t (døgn) opfylder differentialligningen

$$\frac{dm}{dt} = 0{,}0015 \cdot m \cdot (260 - m) \ .$$

Til tiden t = 0 er vægten 20 gram.

Bestem en forskrift for m.

Besvarelse med Nspire

Nspire bestemmer forskrift for den løsning m til differentialligningen $\frac{dm}{dt} = 0{,}0015 \cdot m \cdot (260 - m)$ hvor $m(0) = 20$ og får $m(t) = \frac{260 \cdot 1{,}47698^t}{1{,}47698^t + 12}$.

$$\text{deSolve}\left(m' = 0.0015 \cdot m \cdot (260 - m) \text{ and } m(0) = 20, t, m\right) \blacktriangleright m = \frac{260. \cdot (1.47698)^t}{(1.47698)^t + 12.}$$

Besvarelse med formel

m er løsning til differentialligningen $\frac{dm}{dt} = 0{,}0015 \cdot m \cdot (260 - m)$ og $m(0) = 20$.

Den logistiske ligning $y' = k \cdot y \cdot (M - y)$ har løsningerne $y = \frac{M}{1 + c \cdot e^{-kM \cdot t}}$.

Her er $k = 0{,}0015$, $M = 260$ og $k \cdot M = 0{,}39$ så $m(t) = \frac{260}{1 + c \cdot e^{-0{,}39 \cdot t}}$.

Da $m(0) = 20$, er $20 = \frac{260}{1 + c \cdot e^{-0{,}39 \cdot 0}}$ så $1 + c = \frac{260}{20}$ dvs. $c = 12$, så $m(t) = \frac{260}{1 + 12 \cdot e^{-0{,}39 \cdot t}}$.

Bemærkning

$$\frac{260}{1 + 12 \cdot e^{-0{,}39 \cdot t}} = \frac{260 \cdot e^{-0{,}39 \cdot t}}{(1 + 12 \cdot e^{-0{,}39 \cdot t}) \cdot e^{-0{,}39 \cdot t}} = \frac{260 \cdot e^{-0{,}39 \cdot t}}{e^{-0{,}39 \cdot t} + 12} \quad \text{og} \quad e^{-0{,}39 \cdot t} = (e^{-0{,}39})^t \approx 1{,}47698^t$$

6d. Bestem øvre grænse for størrelsen.

Opgave Et dyrs vægt m (gram) som funktion af tiden t (døgn) opfylder differentialligningen

$$\frac{dm}{dt} = 0{,}0015 \cdot m \cdot (260 - m) \ .$$

Bestem den øvre grænse for vægten.

Besvarelse Et dyrs vægt m (gram) som funktion af tiden t (døgn) opfylder differentialligningen

$$\frac{dm}{dt} = 0{,}0015 \cdot m \cdot (260 - m) \ .$$

For en løsning til den logistiske ligning $y' = k \cdot y \cdot (M - y)$ har y-værdien den øvre grænse M .

Her er $M = 260$, så den øvre grænse for vægten er 260 gram .

6e. Bestem størrelsen når væksthastigheden er størst.

Opgave Et dyrs vægt m (gram) som funktion af tiden t (døgn) opfylder differentialligningen

$$\frac{dm}{dt} = 0{,}0015 \cdot m \cdot (260 - m) \ .$$

Bestem vægten på det tidspunkt hvor væksthastigheden er størst.

Besvarelse Et dyrs vægt m (gram) som funktion af tiden t (døgn) opfylder differentialligningen

$$\frac{dm}{dt} = 0{,}0015 \cdot m \cdot (260 - m) \ .$$

For en løsning til den logistiske ligning $y' = k \cdot y \cdot (M - y)$ er væksthastigheden størst når $y = \frac{M}{2}$.

Her er $\frac{M}{2} = \frac{260}{2} = 130$, så væksthastigheden er størst når vægten er 130 gram .

6f. Bestem tidspunktet hvor væksthastigheden er størst.

Opgave Et dyrs vægt m (gram) som funktion af tiden t (døgn) opfylder differentialligningen

$$\frac{dm}{dt} = 0{,}0015 \cdot m \cdot (260 - m) \ .$$

Til tiden $t = 0$ er vægten 20 gram.

Bestem det tidspunkt hvor væksthastigheden er størst.

Besvarelse Et dyrs vægt m (gram) som funktion af tiden t (døgn) opfylder differentialligningen

$$\frac{dm}{dt} = 0{,}0015 \cdot m \cdot (260 - m) \quad \text{og til} \quad t = 0 \quad \text{er} \quad m = 20 \ .$$

Nspire bestemmer forskrift for den løsning m til $\frac{dm}{dt} = 0{,}0015 \cdot m \cdot (260 - m)$ hvor $m(0) = 20$ og får

$$m(t) = \frac{260 \cdot 1{,}47698^t}{1{,}47698^t + 12} \ .$$

$$\text{deSolve}\left(m' = 0.0015 \cdot m \cdot (260 - m) \text{ and } m(0) = 20, t, m\right) \blacktriangleright \ m = \frac{260. \cdot (1.47698)^t}{(1.47698)^t + 12.}$$

For en løsning til den logistiske ligning $y' = k \cdot y \cdot (M - y)$ er væksthastigheden størst når $y = \frac{M}{2}$.

Her er $\frac{M}{2} = \frac{260}{2} = 130$.

Nspire løser ligningen $130 = \frac{260 \cdot 1{,}47698^t}{1{,}47698^t + 12}$ mht. t og får $t = 6{,}37156$.

Væksthastigheden er størst til tiden 6,4 døgn .

$$\text{solve}\left(130 = \frac{260. \cdot (1.47698)^t}{(1.47698)^t + 12.}, t\right) \blacktriangleright \ t = 6.37156$$

6g. Tegn graf.

Opgave Et dyrs vægt m (gram) som funktion af tiden t (døgn) opfylder differentialligningen

$$\frac{dm}{dt} = 0{,}0015 \cdot m \cdot (260 - m) \ .$$

Til tiden $t = 0$ er vægten 20 gram.

Tegn grafen for m.

Besvarelse Et dyrs vægt m (gram) som funktion af tiden t (døgn) opfylder differentialligningen

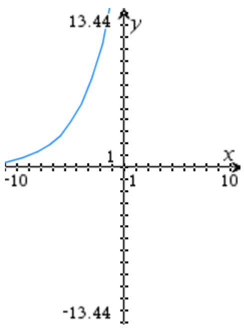
$$\frac{dm}{dt} = 0{,}0015 \cdot m \cdot (260 - m) \quad \text{og til} \quad t = 0 \quad \text{er} \quad m = 20 \ .$$

Nspire bestemmer forskrift for den løsning m til $\frac{dm}{dt} = 0{,}0015 \cdot m \cdot (260 - m)$ hvor $m(0) = 20$ og får

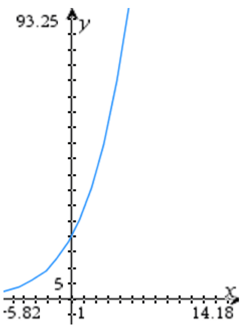
$$m(t) = \frac{260 \cdot 1{,}47698^t}{1{,}47698^t + 12} \ .$$

$$\text{deSolve}\left(m' = 0.0015 \cdot m \cdot (260 - m) \text{ and } m(0) = 20, t, m\right) \blacktriangleright \ m = \frac{260. \cdot (1.47698)^t}{(1.47698)^t + 12.}$$

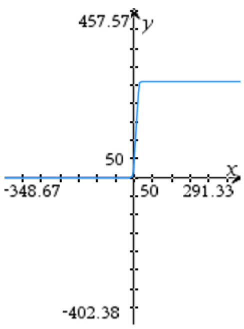
Nspire tegner grafen ud fra denne forskrift. Se figuren.



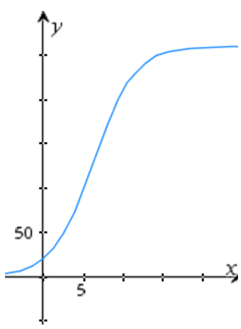
Dur ikke.



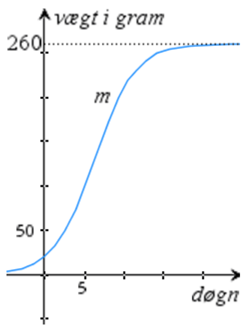
Dur ikke.



For dårlig.



Mangelfuld.



OK.

7. Beviser

7a. Hjælpesætning: $\left(\mathrm{e}^{kx}\right)' = k\,\mathrm{e}^{kx}$

Bevis: For e^{kx} er den ydre funktion $\mathrm{e}^{(\ )}$, og den indre er kx.
Differentialkvotienten af den ydre er $\mathrm{e}^{(\ )}$, og differentialkvotienten af den indre er k.
Differentialkvotienten af e^{kx} er ydre differentieret (taget i indre) gange indre differentieret:
$\left(\mathrm{e}^{kx}\right)' = \mathrm{e}^{(kx)}\cdot k = k\,\mathrm{e}^{kx}$. Hermed har vi bevist hjælpesætningen.

7b. Sætning
Løsningerne til differentialligningen
(1) $\quad y' = k\,y$
er funktionerne
(2) $\quad y(x) = c\,\mathrm{e}^{kx}$

På k's plads i denne forskrift skal stå det tal der står på k's plads i differentialligningen.
Uanset hvilket tal vi skriver på c's plads, så får vi en løsning. Der er altså uendelig mange løsninger.

Første del af beviset: Vi beviser at hvis en funktion er løsning til **(1)**, så er den af typen **(2)**.
Anden del af beviset: Vi beviser at alle funktioner af typen **(2)** er løsninger til **(1)**.

Begrundelsen for at vi differentierer udtrykket i parentesen,
er at det viser sig at vi så får noget vi kan bruge.

1. del af beviset for sætningen

Hvis en funktion $y(x)$ har egenskaben **(1)** (dvs. er løsning til denne ligning) er

$$\left(y\cdot\mathrm{e}^{-kx}\right)' = y'\cdot\mathrm{e}^{-kx} + y\cdot\left(-k\,\mathrm{e}^{-kx}\right) \qquad \text{regel for at differentiere produkt}$$
$$= k\,y\cdot\mathrm{e}^{-kx} + y\cdot\left(-k\,\mathrm{e}^{-kx}\right) \qquad \text{da vi forudsatte (1)}$$
$$= 0$$

Da $y\cdot\mathrm{e}^{-kx}$ differentieret giver 0, må $y\cdot\mathrm{e}^{-kx}$ være lig en konstant:
$$y\cdot\mathrm{e}^{-kx} = c$$
Vi ganger begge denne lignings sider med e^{kx} og får
$$y = c\,\mathrm{e}^{kx} \qquad \text{da} \quad \mathrm{e}^{-kx}\cdot\mathrm{e}^{kx} = \mathrm{e}^{-kx+kx} = \mathrm{e}^{0} = 1 \ .$$
dvs. funktionen er af typen **(2)**.

2. del af beviset for sætningen

En vilkårlig funktion $c\,\mathrm{e}^{kx}$ af typen **(2)** indsætter vi for y i ligningen $y' = k\,y$ og får
$$\left(c\,\mathrm{e}^{kx}\right)' = k\,c\,\mathrm{e}^{kx}$$
Venstre side af ligningen giver $c\,k\,\mathrm{e}^{kx}$, dvs. ligningen passer, så
funktionen $c\,\mathrm{e}^{kx}$ har egenskaben **(1)** (dvs. er løsning til denne ligning).