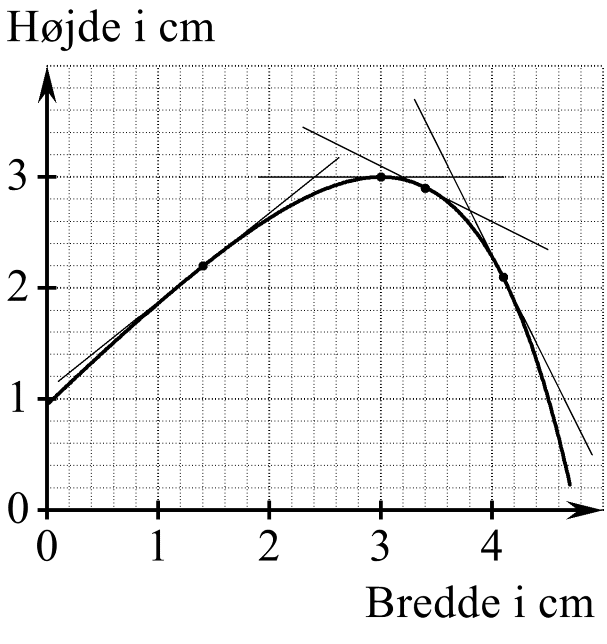
Differential-ligninger

Et oplæg



2007 Karsten Juul

Dette hæfte er tænkt brugt som et oplæg der kan gennemgås før man går i gang med en lærebogs fremstilling af emnet differentialligninger.

Læreren skal ikke gennemgå metoder til at løse øvelserne i dette hæfte. Øvelserne er indrettet sådan at eleverne kan fumle sig frem til resultaterne ud fra det de i forvejen forstår. Derved opnås en forståelse af stoffet som ikke opnås hvis eleverne blot gentager udregningerne i et eksempel uden at være nødt til at føre det der foregår, tilbage til noget de forstår.

Differentialligninger. Et oplæg.

1. udgave 2007

Dette hæfte kan downloades fra www.mat1.dk

Øvelse 1

Lad y betegne vægten, målt i gram, af en plante A på tidspunktet x uger efter 1. juni. Vi ved ikke hvordan A vokser, så vi kan ikke besvare spørgsmålene a)-h), men:

For hvert af spørgsmålene a)-d) skal du angive hvilken af sætningerne e)-h) der er samme spørgsmål.

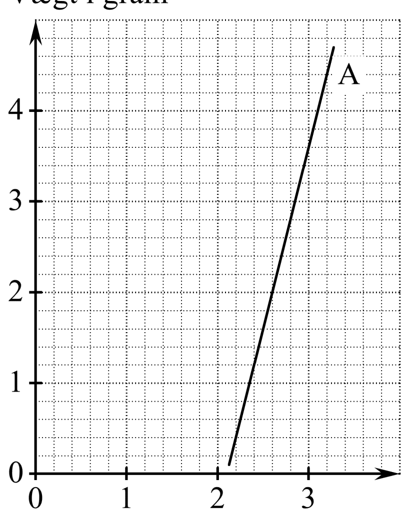
a) Hvor lang tid tager det at øge vægten med 2 gram?
b) Hvor meget bliver vægten øget på 2 uger?
c) Hvornår er vægten 2 gram?
d) Hvad er vægten 2 uger efter 1. juni?

e) Hvilken tilvækst får y når x får en tilvækst på 2?
f) Hvad er y når x er 2?
g) Hvilken tilvækst skal x have for at y får tilvæksten 2?
h) Hvad er x når y er 2?

Øvelse 2

Figur 2a viser hvordan en plante A er vokset. Lad y betegne A's vægt, målt i gram, på tidspunktet x uger efter 1. juni.

a) Hvad er y når x er 2,6, og når x er 3?
b) Når x er ændres fra 2,6 til 3, hvilken tilvækst får x så?
c) Hvilken tilvækst får y når x får en tilvækst på 0,4?
d) Hvilket tal skal en x-tilvækst ganges med for at få den tilsvarende y-tilvækst?
e) Hvordan ses på grafen at svaret på d) er det samme for enhver x-tilvækst.
f) Med hvilken hastighed vokser vægten?



Figur 2a

Den krumme kurve på figur 2b viser hvordan en plante B er vokset. Den lineære graf på figur 2b er grafen fra figur 2a.

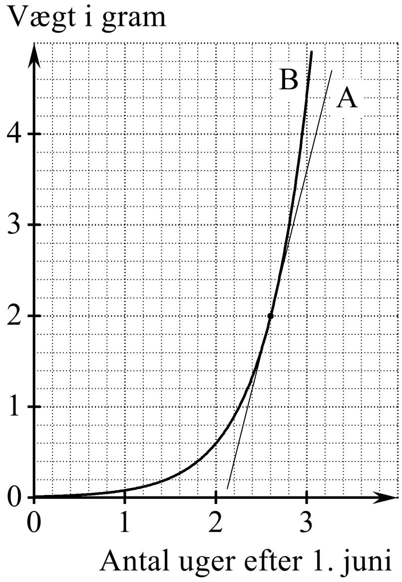
Det ses at omkring 2,6 uger efter 1. juni vokser A og B på næsten samme måde.

g) Med hvilken hastighed vokser B's vægt 2,6 uger efter 1. juni?

Lad y betegne B's vægt, målt i gram, på tidspunktet x uger efter 1. juni.

h) Hvad er y når x er 2,6?

i) Hvad er y' når x er 2,6?



Figur 2b

Øvelse 2 fortsætter på næste side!

På figur 2c er tegnet endnu en tangent til grafen.

j) Hvor hurtigt vokser vægten 2 uger efter 1. juni?

k) Hvad er vægten 2 uger efter 1. juni?

l) Hvad er y når x er 2?

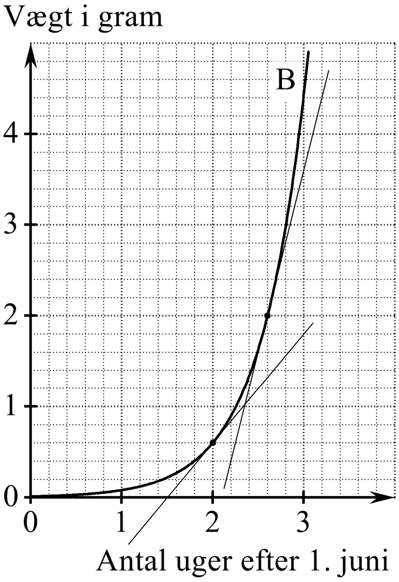
m) Hvad er y' når x er 2?

n) Når $x = 2$, gælder så at $y' = 1{,}2(x-1)$?

o) Når $x = 2{,}6$, gælder så at $y' = 2 + y$?

p) Én af påstandene 1)-4) er sand. Afgør hvilken.

1) For hvert tal x i $]0;3[$ gælder $y' = 2x$.
2) For hvert tal x i $]0;3[$ gælder $y' = 2 + y$.
3) For hvert tal x i $]0;3[$ gælder $y' = 2y$.
4) For hvert tal x i $]0;3[$ gælder $y' = 1{,}2(x-1)$.



Figur 2c

Eksempel 3

Figur 3a viser hvordan en plante A er vokset. Lad y betegne A's vægt, målt i gram, på tidspunktet x uger efter 1. juni.

På figur 3b er vist:

3,4 uger efter 1/6 er vægten 1,6 g, og
4,4 uger efter 1/6 er vægten 2,4 g.

Dette kan også formuleres sådan:

Når $x = 3{,}4$ er $y = 1{,}6$, og
når $x = 4{,}4$ er $y = 2{,}4$.

Heraf ses at når x får tilvæksten 1, så får y tilvæksten 0,8.

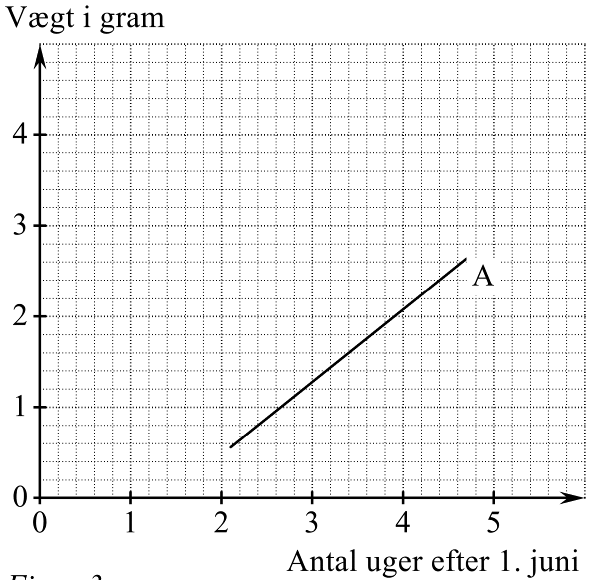
Da grafen er lineær, er væksthastigheden konstant:

Væksthastigheden er 0,8 gram pr. uge.

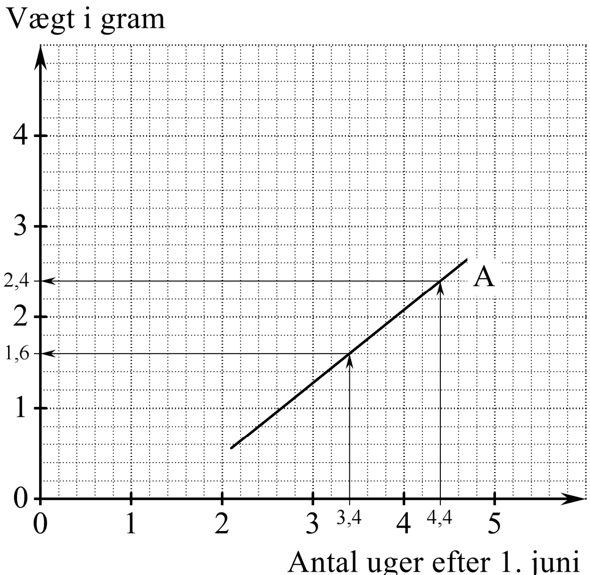
Dette kan også udtrykkes sådan:

$y' = 0{,}8$.

Eksempel 3 fortsættes på næste side!



Figur 3a



Figur 3b

Figur 3c viser hvordan en plante B er vokset

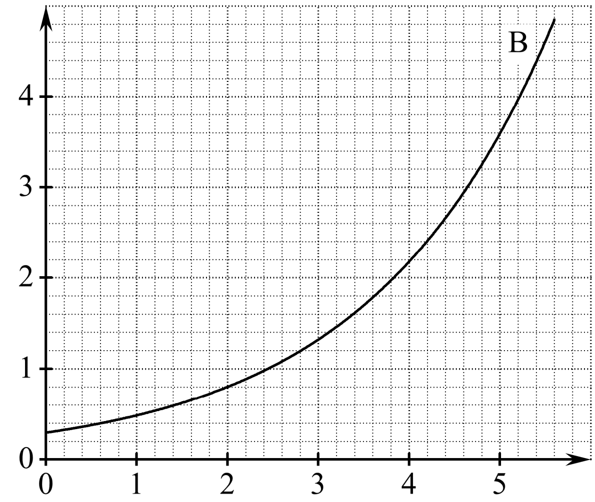
Hvis man på figur 3c tilføjer grafen fra figur 3a, så fås figur 3d.

Det ses at omkring 3,4 uger efter 1. juni vokser A og B på næsten samme måde, så

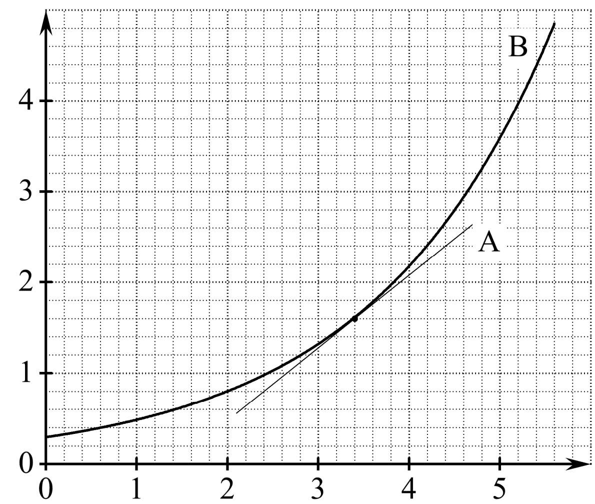
> 3,4 uger efter 1. juni vokser B's vægt med hastigheden 0,8 gram pr. uge.

Dette kan også udtrykkes sådan:

> Når $x = 3{,}4$, så er $y' = 0{,}8$.



Figur 3c



Figur 3d

På figur 3e er tegnet to tangenter mere til grafen for B's vækst. På denne figur kan aflæses:

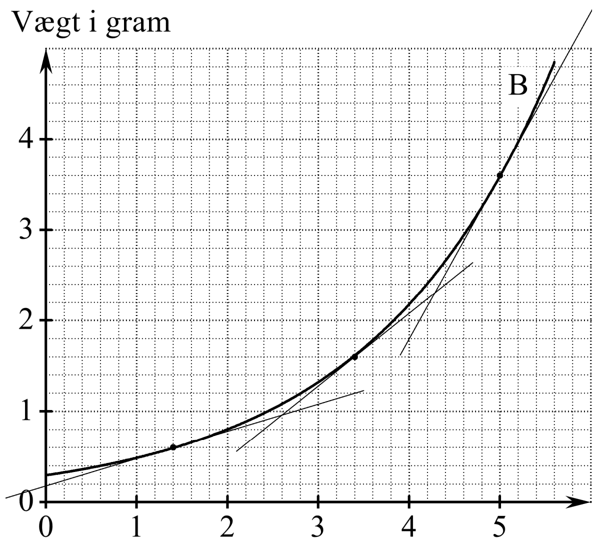
> Når $x = 1{,}4$ er $y = 0{,}6$ og $y' = 0{,}3$.
>
> Når $x = 3{,}4$ er $y = 1{,}6$ og $y' = 0{,}8$.
>
> Når $x = 5{,}0$ er $y = 3{,}6$ og $y' = 1{,}8$.

Af disse tal ses at på hvert af de tre tidspunkter x gælder:

> Væksthastigheden y' er lig halvdelen af vægten y.

Denne sammenhæng gælder også på andre tidspunkter:

> For hvert tal x i $]0;5{,}6[$ er $y' = 0{,}5y$.



Figur 3e

Øvelse 4

En graf (som ikke er gengivet her) viser en plantes vægt y (i gram) som funktion af tiden x (i uger efter 1. juni).

Det oplyses at der for hvert tal x i $]1;9[$ gælder: $y' = 1 - 0{,}2y$.

a) Hvis grafen går gennem punktet $(2{,}5\ ,\ 4{,}4)$, hvad er så hældningskoefficienten for tangenten i dette punkt?

b) Hvis plantens vægt på et tidspunkt mellem 1 og 9 uger efter 1. juni vokser med hastigheden 0,16 gram pr. uge, hvad er så plantens vægt på dette tidspunkt.

Øvelse 5

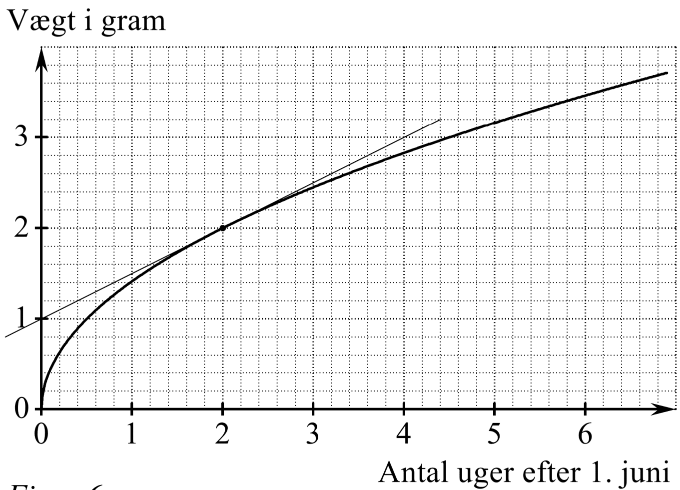
Skitser en funktionsgraf hvorom der gælder:

Når $x = 4$ er $y' = y - 2$.

(Der er mange muligheder. Du skal kun skitsere én af dem).

Øvelse 6

Den krumme graf på figur 6a viser en plantes vægt y (målt i gram) som funktion af tiden x (målt i uger efter 1. juni). Desuden er vist en tangent til grafen.



Figur 6a

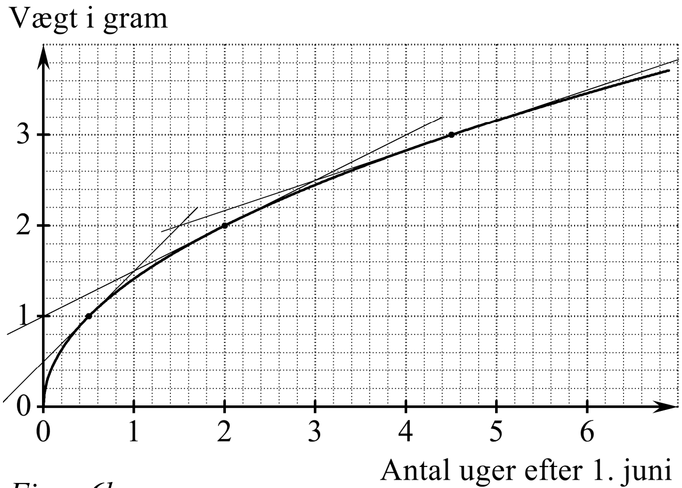
a) Hvad er plantens vægt 2 uger efter 1. juni?

b) Med hvilken hastighed vokser plantens vægt 2 uger efter 1. juni?

c) Hvad er y' når $x = 2$?

d) Hvad er y når $x = 2$?

På figur 6b er tegnet to tangenter mere til grafen.



Figur 6b

e) Udfyld en tabel magen til følgende:

x	0,5	2	4,5
y			
y'			

Det er muligt at skrive et simpelt udtryk med y i stedet for ... i ligningen $y' = \ldots$ så den fremkomne ligning gælder for alle x i $]1;6[$.

f) Gæt denne ligning ud fra tabellen.

Øvelse 7

Et rektangels bredde kan ændres med et håndtag. Grafen på figur 7a viser rektanglets højde y (målt i cm) som funktion af rektanglets bredde x (målt i cm). På figur 7b er tegnet nogle af tangenterne til grafen.

a) Udfyld en tabel magen til følgende:

x	0,4	1,6	2,4	3,6
y				
y'				

Det er muligt at skrive et simpelt udtryk med x og/eller y i stedet for ... i ligningen

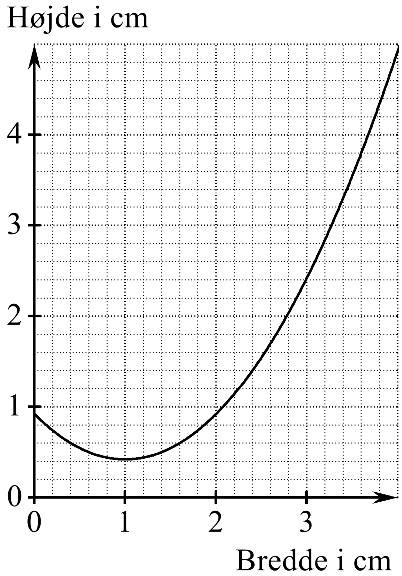
$$y' = \ldots$$

så den fremkomne ligning gælder for alle x i $]0;4[$.

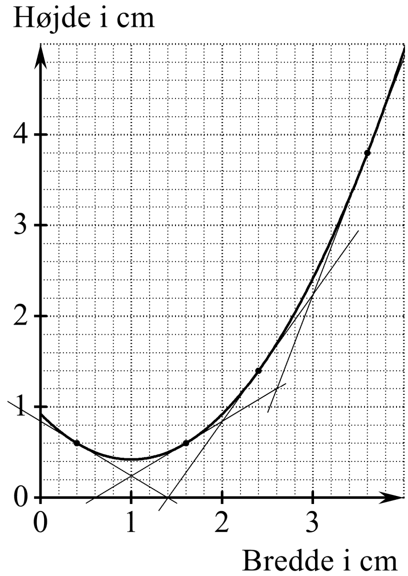
b) Gæt denne ligning ud fra tabellen.

c) Brug denne ligning til at bestemme tangenthældningen i grafpunktet $(0{,}6\,,\,0{,}5)$.

d) Brug også ligningen til at argumentere for grafens forløb.



Figur 7a



Figur 7b

Øvelse 8

For en størrelse y som funktion af en størrelse x gælder:

For alle tal x i $\mathbf{R}$ er $y' = 0{,}5^y$.

a) Hvis man udregner $0{,}5^y$ for forskellige værdier af y , vil de største værdier af y så give de største resultater?

b) Find en værdi af y så $0{,}5^y$ bliver negativ, eller argumentér for at det ikke kan lade sig gøre.

P og Q er to punkter på grafen for y , og Q's andenkoordinat er større end P's.

c) Er tangenthældningen i Q større end i P ?

R og S er to punkter på grafen for y , og S's førstekoordinat er større end R's.

d) Er S's andenkoordinat er større end R's?

Øvelse 9

Figur 9a viser temperaturen y (målt i °C) i en beholder efter x timer. På figur 9b er tegnet nogle af tangenterne til grafen.

a) Aftager temperaturen hurtigere når temperaturen er højere?

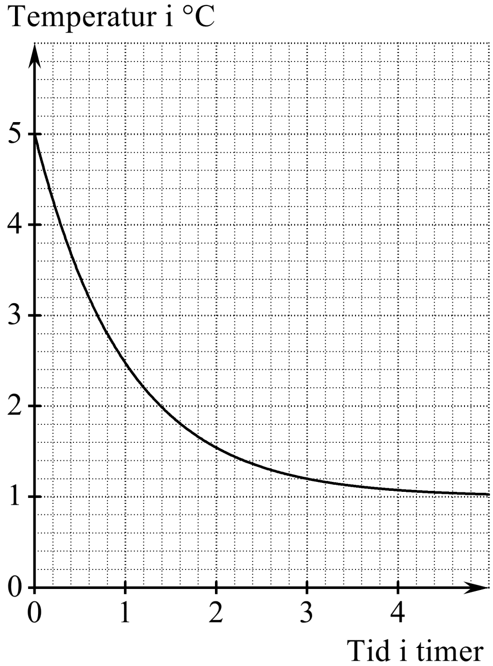
b) Aftager temperaturen hurtigere når der er gået længere tid?

Det er muligt at skrive et simpelt udtryk med x og/eller y i stedet for ... i ligningen

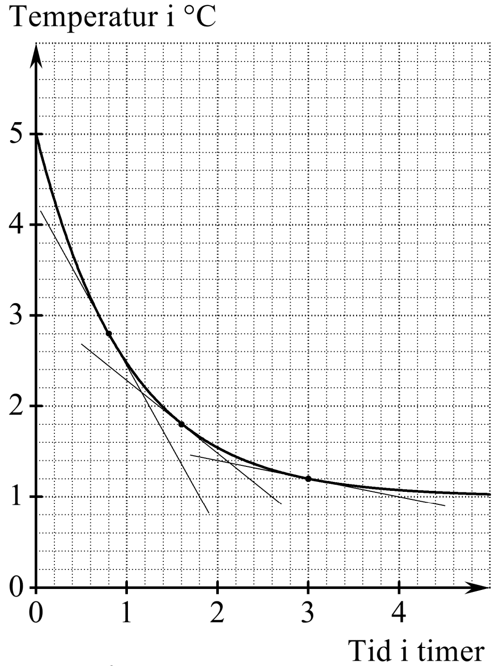
$$y' = \ldots$$

så den fremkomne ligning gælder for alle x i $]0;5[$.

c) Gæt denne ligning.



Figur 9a



Figur 9b

Øvelse 10

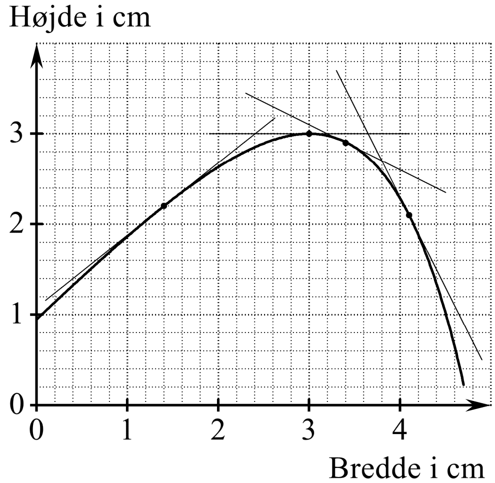
Et rektangels bredde kan ændres med et håndtag. Grafen på figur 10 viser rektanglets højde y (målt i cm) som funktion af rektanglets bredde x (målt i cm). Desuden er vist nogle af tangenterne til grafen.

a) Er y voksende i $]0;4{,}7[$, aftagende i $]0;4{,}7[$ eller ingen af delene?

b) Er y' voksende i $]0;4{,}7[$, aftagende i $]0;4{,}7[$ eller ingen af delene?

Det er muligt at skrive et simpelt udtryk med x og/eller y i stedet for ... i ligningen $y' = \ldots$ så den fremkomne ligning gælder for alle x i $]0;4{,}7[$.

c) Gæt denne ligning.



Figur 10

Øvelse 11
Nogle dyr er udsat i et område. Der gælder

$$y = 3e^{0{,}1x}$$

hvor y er antal dyr, målt i tusinder, og x er antal uger efter udsættelsen.

a) Bestem y'.

b) Med hvilken hastighed vokser antallet af dyr efter 1 uge?

c) Hvad er antallet af dyr efter 1 uge?

d) I de foregående spørgsmål er bestemt antal og væksthastighed på tidspunktet 1 uge efter udsættelsen. Hvilket tal skal antallet ganges med for at få væksthastigheden?

e) Bestem antal og væksthastighed 2 uger efter udsættelsen, og bestem hvilket tal antallet skal ganges med for at få væksthastigheden.

f) På tidspunktet x_0 uger efter udsættelsen skal du bestemme antal og væksthastighed udtrykt ved x_0. Hvilket tal skal antallet ganges med for at få væksthastigheden?

g) Find en simpel regel for hvordan man på ethvert tidspunkt kan beregne væksthastigheden når man kender antallet. Skriv denne regel som en ligning.

Øvelse 12

Nogle dyr, hvoraf nogle ikke kan formere sig, er udsat i et område. Der gælder

$$y = 1 + e^{x}$$

hvor y er antal dyr, målt i tusinder, og x er antal uger efter udsættelsen.

a) Bestem antal og væksthastighed 2 uger efter udsættelsen.

b) Bestem antal og væksthastighed 3 uger efter udsættelsen.

c) Bestem antal og væksthastighed x_0 uger efter udsættelsen.

d) Find en simpel regel for hvordan man på ethvert tidspunkt kan beregne væksthastigheden når man kender antallet. Skriv denne regel som en ligning.

Øvelse 13

Nogle dyr, hvoraf nogle ikke kan formere sig, er udsat i et område. Der gælder

$$y = e^{0{,}2x} + 3$$

hvor y er antal dyr, målt i tusinder, og x er antal uger efter udsættelsen.

a) Undersøg om $y' = 0{,}2y - 0{,}6$.

Definition 14: En ligning kaldes en <u>differentialligning</u> hvis

den ubekendte er en funktion, og

den ubekendtes differentialkvotient indgår.

Definition 15: En funktion er <u>løsning</u> til en givet differentialligning hvis

funktionens definitionsmængde er et interval, og

ligningen er opfyldt for ethvert tal i definitionsmængden.

Eksempel 16

Differentialligningen

$$y' = x + y$$

har uendelig mange løsninger. To af dem er funktionerne

$$y = \mathrm{e}^x - x - 1 \quad , \qquad x \in \mathbf{R}$$

og

$$y = 2\mathrm{e}^x - x - 1 \quad , \qquad x \in \mathbf{R} \ .$$

Øvelse 17

I eksempel 16 er angivet to løsninger til en differentialligning. Gæt nogle flere løsninger til denne ligning.

Eksempel 18

I en opgave med en differentialligning er det ikke altid nødvendigt at finde en regneforskrift for en funktion der er løsning. Antag fx at det om en funktion er oplyst at den er løsning til differentialligningen

$$(*) \qquad y' = \frac{x}{y} \ .$$

Hvis vi for et punkt på funktionens graf kender to af tallene x, y og y', så kan vi bestemme det tredje ud fra sammenhængen $(*)$.

Hvis det vides at en funktion er løsning til $(*)$, og at dens graf går gennem punktet $P(3,6)$, så kan vi ved indsættelse i $(*)$ finde at tangenten i P har hældningskoefficienten $\frac{1}{2}$. Herefter kan vi nemt finde frem til at tangentens ligning er $y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$.

Hvis det om en funktion f vides at den er løsning til $(*)$, og at dens graf ligger over førsteaksen, så kan vi ud fra $(*)$ slutte at $f'(x)$ har samme fortegn som x. Ud fra denne oplysning kan vi slutte hvordan funktionens monotoniforhold er.

Øvelse 19

I eksempel 18 er antydet hvordan følgende opgave kan besvares:

> **Opgave.** En funktion $f(x)$ er løsning til differentialligningen
>
> $$y' = \frac{x}{y} \ .$$
>
> og grafen for $f(x)$ går gennem punktet $P(3,6)$.
>
> a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for $f(x)$ i punktet P.
>
> Det oplyses at $f(x)$ har definitionsmængden $\mathbf{R}$, og at grafen for $f(x)$ ligger over førsteaksen.
>
> b) Bestem monotoniforholdene for $f(x)$.

Skriv en detaljeret besvarelse af denne opgave.

Øvelse 20

En af løsningerne til differentialligningen

$$y' = y^2$$

er

$$y = \frac{1}{1-x} \quad , \qquad x < 1 .$$

Gæt nogle flere løsninger.

Øvelse 21

Differentialligningen

$$y' = \mathrm{e}^{-y}$$

har løsningerne

$$y = \ln(x-k) \quad , \qquad x > k ,$$

dvs. når vi skriver et bestemt tal på k's plads, så fås en løsning, og der er ikke andre løsninger end dem der fås på denne måde.

a) Hvor skæres førsteaksen af grafen for løsningen

$$y = \ln(x-2) \quad , \qquad x > 2 .$$

b) Bestem den løsning hvis graf går gennem koordinatsystemets begyndelsespunkt.

Øvelse 22

Et antal dyr udsættes i et område.

– På tidspunktet 0 dage efter udsættelsen er væksthastigheden (målt i tilvækst i antal pr. dag) 8,00 % af antallet på dette tidspunkt.

– På tidspunktet 1 dag efter udsættelsen er væksthastigheden (målt i tilvækst i antal pr. dag) 7,99 % af antallet på dette tidspunkt.

– På tidspunktet 2 dage efter udsættelsen er væksthastigheden (målt i tilvækst i antal pr. dag) 7,98 % af antallet på dette tidspunkt.

– osv.

a) Når der er gået 2 dage efter udsættelsen, hvad skal antallet på dette tidspunkt så ganges med for at få væksthastigheden (tilvækst i antal pr. dag) på dette tidspunkt?

b) Når der er gået x dage efter udsættelsen, hvad skal antallet på dette tidspunkt så ganges med for at få væksthastigheden (tilvækst i antal pr. dag) på dette tidspunkt?

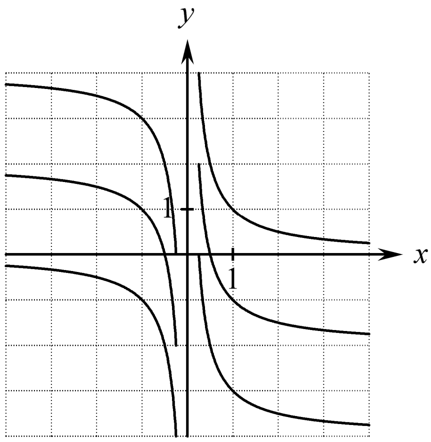
c) Opskriv en differentialligning der beskriver hvordan antallet y ændrer sig som funktion af tiden x (målt i antal dage efter udsættelsen).

d) På hvilket tidspunkt er antallet størst?

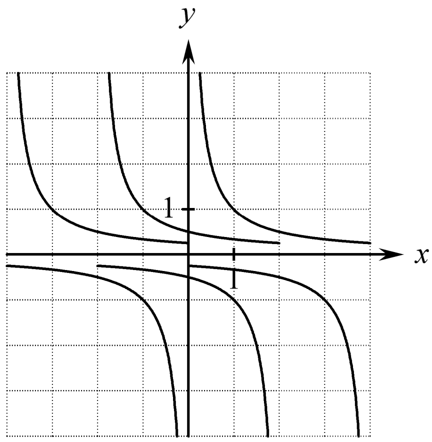
Øvelse 23

Figurerne viser graferne for nogle af løsningerne til hver sin af differentialligningerne (1)-(4). Til hver af disse ligninger skal du finde den tilsvarende figur. Begrund svaret uden at bestemme regneforskrift for nogen af løsningerne.

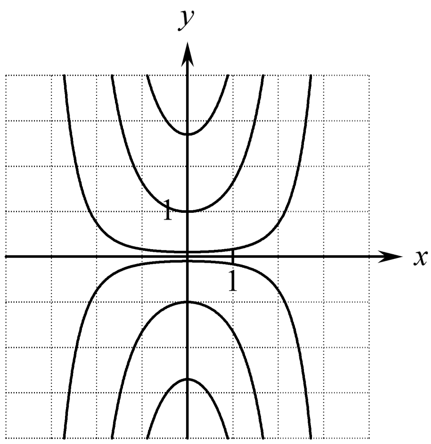
(1) $y' = x \cdot y$ (2) $y' = -y^2$ (3) $y' = -\frac{1}{x^2}$ (4) $y' = x + y$.



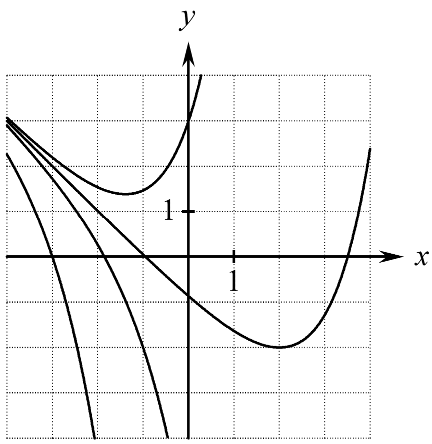
Figur 23a



Figur 23b



Figur 23c



Figur 23d