Differentialligningen $y' = ky$

Sætning

Løsningerne til differentialligningen

$$y' = ky$$

er funktionerne

$$y(x) = c\,\mathrm{e}^{kx}$$

Bemærk at

på k's plads i denne forskrift skal stå det tal der står på k's plads i differentialligningen

og at

uanset hvilket tal vi skriver på c's plads, så får vi en løsning.
Det er altså uendelig mange løsninger.

1. del af beviset for sætningen

For en funktion $y(x)$ med egenskaben $y' = ky$ er

$$\begin{aligned}\left(y\cdot \mathrm{e}^{-kx}\right)' &= y'\cdot \mathrm{e}^{-kx} + y\cdot\left(-k\,\mathrm{e}^{-kx}\right)\\ &= ky\cdot \mathrm{e}^{-kx} + y\cdot\left(-k\,\mathrm{e}^{-kx}\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

Da $y\cdot \mathrm{e}^{-kx}$ differentieret giver 0, må $y\cdot \mathrm{e}^{-kx}$ være lig en konstant:

$$y\cdot \mathrm{e}^{-kx} = c$$

Vi ganger begge denne lignings sider med e^{kx} og får

$$y = c\,\mathrm{e}^{kx}$$

da $\mathrm{e}^{-kx+kx} = 1$.

Konklusion: Hvis en funktion $y(x)$ har egenskaben $y' = ky$
så har denne funktion en forskrift af typen
$y(x) = c\,\mathrm{e}^{kx}$ hvor c er et tal.

2. del af beviset for sætningen

Vi indsætter $c\,\mathrm{e}^{kx}$ for y i ligningen $y' = ky$ og får

$$\left(c\,\mathrm{e}^{kx}\right)' = k\,c\,\mathrm{e}^{kx}$$

Venstre side af ligningen giver $c\,k\,\mathrm{e}^{kx}$. Ligningen passer.

Konklusion: Funktionerne $y(x) = c\,\mathrm{e}^{kx}$ har egenskaben $y' = ky$.