

# Differentialligningen $y' = ky$

---

## Sætning

Løsningerne til differentialligningen

$$y' = ky$$

er funktionerne

$$y(x) = ce^{kx}$$

Bemærk at

på  $k$ 's plads i denne forskrift skal stå det tal der står på  $k$ 's plads i differentialligningen

og at

uanset hvilket tal vi skriver på  $c$ 's plads, så får vi en løsning.  
Det er altså uendelig mange løsninger.

## 1. del af beviset for sætningen

For en funktion  $y(x)$  med egenskaben  $y' = ky$  er

$$\begin{aligned}(y \cdot e^{-kx})' &= y' \cdot e^{-kx} + y \cdot (-k e^{-kx}) \\ &= ky \cdot e^{-kx} + y \cdot (-k e^{-kx}) \\ &= 0\end{aligned}$$

Da  $y \cdot e^{-kx}$  differentieret giver 0, må  $y \cdot e^{-kx}$  være lig en konstant:

$$y \cdot e^{-kx} = c$$

Vi ganger begge denne lignings sider med  $e^{kx}$  og får

$$y = ce^{kx}$$

da  $e^{-kx+kx} = 1$ .

**Konklusion:** Hvis en funktion  $y(x)$  har egenskaben  $y' = ky$  så har denne funktion en forskrift af typen  $y(x) = ce^{kx}$  hvor  $c$  er et tal.

## 2. del af beviset for sætningen

Vi indsætter  $ce^{kx}$  for  $y$  i ligningen  $y' = ky$  og får

$$(ce^{kx})' = kce^{kx}$$

Venstre side af ligningen giver  $cke^{kx}$ . Ligningen passer.

**Konklusion:** Funktionerne  $y(x) = ce^{kx}$  har egenskaben  $y' = ky$ .

Differentialligningen  $y' = ky$ . © 2010 Karsten Juul. Kan downloades fra [www.mat1.dk](http://www.mat1.dk). Må benyttes i undervisning hvis læreren straks sender e-mail til [kj@mat1.dk](mailto:kj@mat1.dk) som oplyser at den bruges og oplyser om hold, lærer og skole.