Bestemme monotoniforhold og ekstrema med $f'(x)$

Rammerne er ændrede versioner af rammer fra hæftet
"Differentialregning 2. del" fra www.mat1.dk .

7.09 Monotoniforhold og tangenthældning $f'(x)$

Hvis $f'(x)$ er positiv

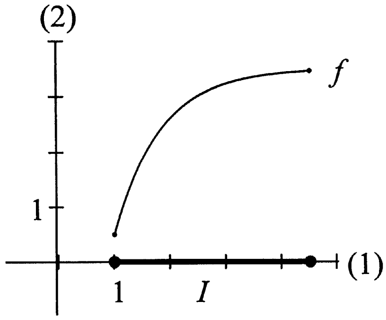
Grafen på figur 7d er tegnet sådan at der gælder

$(*)$ tangenthældningen $f'(x)$ er positiv for hvert tal x i intervallet I .

Det ses at der gælder

$(**)$ $f(x)$ er voksende i intervallet I .

Hvis man prøver at tegne grafen sådan at $(*)$, men ikke $(**)$ gælder, så bliver man overbevist om at det ikke kan lade sig gøre. Man kan bevise at hvis $(*)$ gælder, så gælder $(**)$ også.

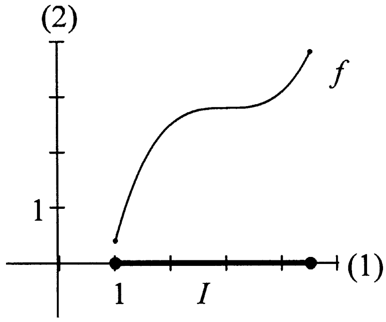


Figur 7d

Hvis der er undtagelser fra at $f'(x)$ er positiv

Funktionen $f(x)$ hvis graf er vist på figur 7e, er voksende selv om der er ét punkt hvori tangenthældningen er 0.

Selv om der er enkelte undtagelser fra $(*)$, kan man slutte at $(**)$ gælder.



Figur 7e

(7f) Sætning

Laf $f(x)$ være en funktion der er differentiabel i ethvert tal x i et interval I .

Hvis $f'(x)$ er positiv for alle x i I , evt. med endeligt mange undtagelser,
så er $f(x)$ voksende i I .

Hvis $f'(x)$ er negativ for alle x i I , evt. med endeligt mange undtagelser,
så er $f(x)$ aftagende i I .

7.12 Bestemme monotoniforhold med differentialregning

Opgaven

Bestem monotoniforholdene for funktionen

$$f(x) = -\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{4}{3}x^3 - 2x^2 \ .$$

En besvarelse

Define $f(x)=\frac{-1}{4}\cdot x^4-\frac{4}{3}\cdot x^3-2\cdot x^2$	*Udført*
Define $df(x)=\frac{d}{dx}(f(x))$	*Udført*
$df(x)$	$-x^3-4\cdot x^2-4\cdot x$
solve$(df(x)=0,x)$	$x=-2$ or $x=0$
$df(-3)$	3
$df(-1)$	1
$df(1)$	-9

Vi får Nspire til at

differentiere funktionen $f(x) = -\tfrac{1}{4}x^4 - \tfrac{4}{3}x^3 - 2x^2$

og får

$$f'(x) = -x^3 - 4x^2 - 4x \ .$$

Vi får Nspire til at

løse ligningen $-x^3 - 4x^2 - 4x = 0$ mht. x

og får løsningerne

$$x = -2 \quad \text{eller} \quad x = 0 \ .$$

Heraf følger at $f'(x)$ kun kan skifte fortegn i x-værdierne -2 og 0 :

Da $f'(-3) = 3$ er $f'(x)$ positiv for $x < -2$.

Da $f'(-1) = 1$ er $f'(x)$ positiv for $-2 < x < 0$.

Da $f'(1) = -9$ er $f'(x)$ negativ for $0 < x$.

Af dette følger:

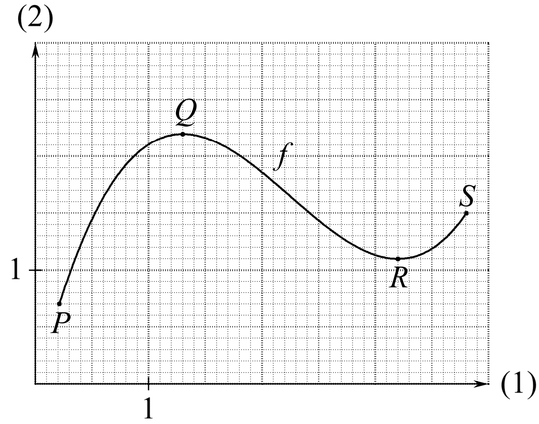
$f(x)$ er voksende i intervallet $x \le 0$

$f(x)$ er aftagende i intervallet $0 \le x$.

Oversigt:

x :		-2		0	
$f'(x)$:	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$:	$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$

8.05 Lokale ekstrema



y-koordinaten til R er <u>lokalt minimum</u> for f da der er et stykke af grafen omkring R hvor ingen af y-koordinaterne er mindre end y-koordinaten til R .

y-koordinaten til R er <u>ikke minimum</u> for f da der er punkter på grafen (f.eks. P) der har en y-koordinat som er mindre end y-koordinaten til R .

y-koordinaten til Q er <u>lokalt maksimum</u> for f da der er et stykke af grafen omkring Q hvor ingen af y-koordinaterne er større end y-koordinaten til Q .

y-koordinaten til Q er <u>maksimum</u> for f da ingen punkter på grafen har en y-koordinat som er større end y-koordinaten til Q .

Et <u>lokalt ekstremum</u> er et lokalt minimum eller et lokalt maksimum.

f har lokalt maksimum i $x = 1{,}3$, og det lokale maksimum er $y = 2{,}2$.

f har lokalt minimum i $x = 3{,}2$, og det lokale minimum er $y = 1{,}1$.

8.07 Bestemme lokale ekstrema

Define $f(x)=\frac{1}{3}\cdot x^3+\frac{3}{2}\cdot x^2-18\cdot x-90$	*Udført*
Define $df(x)=\frac{d}{dx}(f(x))$	*Udført*
$df(x)$	$x^2+3\cdot x-18$
solve$(df(x)=0,x)$	$x=^-6$ or $x=3$
$df(^-7)$	10
$df(0)$	$^-18$
$df(4)$	10
$f(^-6)$	0
$f(3)$	$\frac{^-243}{2}$

Opgaven

Bestem de lokale ekstrema for funktionen

$$f(x) = \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{3}{2}x^2 - 18x - 90 \ .$$

En besvarelse

Første del af besvarelsen er en bestemmelse af monotoniforholdene ved hjælp af $f'(x) = x^2 + 3x - 18$ som vist i ramme 7.12 . Vi finder frem til følgende:

x :		-6		3	
$f'(x)$:	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$:	↗		↘		↗

Da $f(-6) = 0$ og $f(3) = -\frac{243}{2}$ får vi

$f(x)$ har lokalt maksimum i $x = -6$ og det lokale maksimum er $y = 0$

$f(x)$ har lokalt minimum i $x = 3$ og det lokale minimum er $y = -\frac{243}{2}$.

8.11 Bestemme ekstremum med differentialregning

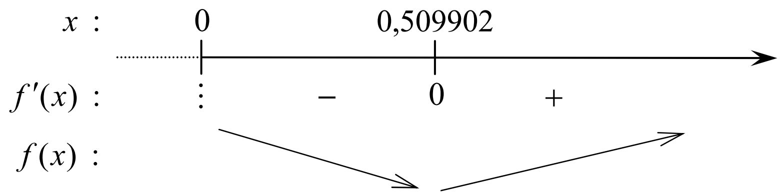
Opgaven

Bestem minimum for funktionen

$$f(x) = 0{,}50x^3 - 0{,}39x + 1{,}4 \ , \quad x > 0 \ .$$

En besvarelse

Første del af besvarelsen er en bestemmelse af monotoniforholdene ved hjælp af $f'(x) = 1{,}50x^2 - 0{,}39$ som vist i ramme 7.12 . Vi finder frem til følgende:



Da $f(0{,}509902) = 1{,}26743 \approx 1{,}3$ fås af tallinjen:

$$\underline{\underline{f(x) \text{ har minimum for } x = 0{,}51 \text{ og minimum er } y = 1{,}3}}$$

8.13 To typer ekstremumsopgaver

For en bestemt type figurer er rumfanget $f(x)$, målt i m^3, bestemt ved

$$f(x) = 0{,}50x^3 - 0{,}39x + 1{,}4 \ , \quad x > 0 \ ,$$

hvor x er figurens bredde, målt i m.

Funktionen $f(x)$ blev behandlet i ramme 8.11.

Om de omtalte figurer kan man fx stille spørgsmålet

(∗) Hvad skal bredden være for at rumfanget bliver mindst muligt?

eller spørgsmålet

(∗∗) Hvad er det mindst mulige rumfang?

Hvis spørgsmålet er (∗), er svaret $\underline{\underline{0{,}51 \text{ m}}}$, og det er ikke nødvendigt at udregne at $f(0{,}509902) = 1{,}26743 \approx 1{,}3$.

Hvis spørgsmålet er (∗∗), er svaret $\underline{\underline{1{,}3 \text{ m}^3}}$.