Vektorer i planen

– Fem opgavesæt

for gymnasiets standardforsøg i matematik

2004 Karsten Juul

Vektorer i planen – Opgavesæt nr. 1 af 5

Dette opgavesæt drejer sig om det grundlæggende om vektorer.

VP 1

I et koordinatsystem i planen er givet to vektorer $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$.

Vektoren $\vec{c}$ er bestemt ved at $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$.

Bestem koordinatsættet til $\vec{c}$, og bestem $\left|\vec{c}\right|$. Bestem $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|$.

En vektor $\vec{d}$ er bestemt ved $\vec{d} = \begin{pmatrix} t \\ 5 \end{pmatrix}$ hvor t er et tal.

Bestem de værdier af t for hvilke $\left|\vec{d}\right| = 13$.

Bestem de værdier af t for hvilke længden af $\vec{a} + \vec{d}$ er $\sqrt{2}$.

VP 2

I et koordinatsystem er givet vektorerne $\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Bestem koordinatsættet til $2\vec{a} + 7\vec{b}$.

Bestem tallene s og t så $s\vec{a} + t\vec{b} = \begin{pmatrix} 11 \\ 24 \end{pmatrix}$.

VP 3

Parallelogrammet $ABCD$ udspændes af vektorerne $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix}$ og $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 28 \end{pmatrix}$.

Bestem koordinatsættet til $\overrightarrow{AC}$, og bestem $|AC|$.

Bestem længden af diagonalen BD.

VP 4

I et koordinatsystem i planen er givet to punkter $A(4, 7)$ og $B(-8, 16)$.

Bestem koordinatsættet til $\overrightarrow{AB}$.

Et punkt C er bestemt ved at $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -8 \\ 22 \end{pmatrix}$. Bestem koordinatsættet til C.

Et punkt D er bestemt ved at $\overrightarrow{AD}$ er ensrettet med $\overrightarrow{AB}$, og at længden af $\overrightarrow{AD}$ er 3 gange længden af $\overrightarrow{AB}$. Bestem koordinatsættet til $\overrightarrow{AD}$, og bestem koordinatsættet til D.

Om et punkt E på linjestykket AB oplyses at $\left|AE\right| = \frac{2}{3}\left|AB\right|$. Bestem koordinatsættet til E.

Om et punkt F på linjestykket AB oplyses at $\left|AF\right| = 4$. Bestem koordinatsættet til F.

Vektorer i planen – Opgavesæt nr. 2 af 5

Dette opgavesæt drejer sig om skalarprodukt. Desuden repeteres emnerne fra første sæt.

VP 5

Der er givet vektorerne $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$
samt punkterne $A(3,5)$ og $B(-2,6)$.

Bestem $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Bestem t så $\vec{a} \cdot \vec{c} = -4$.

Undersøg om vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{d}$ er vinkelret på hinanden.

Bestem t så $\vec{a}$ og $\vec{c}$ er vinkelret på hinanden.

Bestem t så $\vec{a}$ er vinkelret på vektoren $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1+t \\ 9-2t \end{pmatrix}$.

Bestem t så $\vec{a}$ er vinkelret på $\vec{a} + t\vec{b}$.

Bestem t så $\vec{c}$ er vinkelret på $\overrightarrow{AB}$.

Det oplyses at $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} t^2 - t + 7 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestem t så $\vec{b}$ er vinkelret på $\overrightarrow{AC}$.

VP 6

Der er givet vektorerne $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ samt punkterne $A(10,2)$, $B(4,7)$ og $C(11,4)$.

Bestem vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Bestem vinklen mellem $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$.

Bestem vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{a} + \vec{b}$.

Bestem i trekant ABC vinklen mellem siden AB og medianen m_a med fodpunkt på siden BC.

VP 7

Der er givet vektorerne $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ og $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix}$.

Bestem koordinatsættet til projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$.

Bestem t så projektionen af $\vec{c}$ på $\vec{b}$ er $\vec{b}$.

Bestem længden af projektionen af $\vec{b}$ på $\vec{a}$.

Der er givet punkterne $A(0,3)$, $B(4,4)$ og $C(1,7)$. Lad D betegne fodpunktet af højden fra C på AB.

Bestem koordinatsættet til $\overrightarrow{BD}$, og bestem derefter koordinatsættet til $\overrightarrow{OD}$.

Vektorer i planen – Opgavesæt nr. 3 af 5

Dette opgavesæt drejer sig om determinant og linjens ligning. Desuden repeteres emnerne fra de foregående sæt.

VP 8

Der er givet vektorerne $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \end{pmatrix}$ og $\vec{c} = 3\hat{\vec{a}} + \vec{b}$ samt punkterne $P(2,-1)$ og $Q(4,3)$.

Bestem koordinatsættet til $\vec{c}$, og bestem længden af $\vec{c}$.

Bestem længden af vektoren $2\overrightarrow{PQ} - \widehat{\overrightarrow{PQ}}$.

Bestem koordinatsættet til punktet R bestemt ved $\overrightarrow{PR} = \vec{a} + \hat{\vec{a}}$.

VP 9

Der er givet vektorerne $\vec{a} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ t \end{pmatrix}$ og $\vec{d} = \begin{pmatrix} 9 \\ -\frac{15}{2} \end{pmatrix}$
samt punkterne $P(-3,2)$ og $Q(3,5)$.

Bestem $\det(\vec{a},\vec{b})$. Bestem t så $\det(\vec{a},\vec{c}) = 7$.

Undersøg om vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{d}$ er parallelle.

Bestem t så $\vec{a}$ og $\vec{c}$ er parallelle.
Bestem t så $\vec{a}$ er parallel med $\overrightarrow{PQ} + t\vec{b}$.

VP 10

Der er givet vektorerne $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\vec{c} = \begin{pmatrix} t+1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Bestem arealet af det parallelogram der udspændes af $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Bestem de værdier af t for hvilke $\vec{a}$ og $\vec{c}$ udspænder et parallelogram med arealet 8.

Bestem de værdier af t for hvilke $\vec{b} + t\vec{a}$ og $\vec{b}$ udspænder et parallelogram med arealet 2.

Et parallelogram $ABCD$ er bestemt ved $A(2,-3)$, $B(1,7)$ og $D(0,-5)$. Bestem arealet af dette parallelogram.

VP 11

Der er givet vektorerne $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 14 \\ 2 \end{pmatrix}$, og en linje l har ligningen $3x - y + 7 = 0$.

Angiv koordinatsættet til en vektor som er vinkelret på l, og bestem koordinatsættet til en vektor som er parallel med l.

Bestem gradtallet for den spidse vinkel mellem $\vec{a}$ og l.

Bestem koordinatsættet til $\vec{b}$'s projektion på l.

Vektorer i planen – Opgavesæt nr. 4 af 5

Dette opgavesæt drejer sig om ligning og parameterfremstilling for linje. Desuden repeteres emnerne fra de foregående sæt.

VP 12

En linje l_1 har parameterfremstillingen

$$l_1: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad t \in \mathrm{R} ,$$

og en linje l_2 har ligningen

$$l_2: \quad 4 \cdot (x-1) \; + \; 7 \cdot (y-(-2)) \; = \; 0 .$$

Angiv koordinatsættet til et punkt der ligger på l_1, og til en vektor der er parallel med l_1.

Angiv koordinatsættet til et punkt der ligger på l_2, og til en vektor der er vinkelret på l_2.

I en mellemregning, men ikke i et facit, kan man skrive en linjes ligning sådan som ligningen for l_2 er skrevet ovenfor. Skriv ligningen for l_2 reduceret, fx på formen $a \cdot x + b \cdot y + c \; = \; 0$.

Der er givet to punkter $A(-6, 3)$ og $B(2, 7)$ samt en vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Bestem en parameterfremstilling for den linje l_3 der går gennem A og er parallel med $\vec{u}$.

Bestem en ligning for den linje l_4 der går gennem A og er vinkelret på $\vec{u}$.

Bestem en ligning for den linje l_5 der går gennem B og er parallel med $\vec{u}$.

Bestem en parameterfremstilling for den linje l_6 der går gennem A og B .

VP 13

En linje l har parameterfremstillingen

$$l: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad , \quad t \in \mathrm{R} ,$$

og en linje m har ligningen

$$m: \quad 2x - 3y + 8 \; = \; 0 .$$

Angiv koordinatsættet til en vektor som er parallel med l, og til en vektor som er vinkelret på m .

Der er givet vektorerne $\vec{a} = \begin{pmatrix} -\frac{10}{3} \\ -4 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Gør rede for at $\vec{a}$ er parallel med l . Gør rede for at $\vec{b}$ er parallel med m .

Bestem gradtallet for den spidse vinkel mellem $\vec{b}$ og l .

Bestem koordinatsættet til projektionen af $\vec{a}$ på m .

Opgavesættet fortsætter på næste side!

VP 14

En linje l har parameterfremstillingen

$$l: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad , \quad t \in \mathrm{R} .$$

Man kan altid forestille sig at sådan en parameterfremstilling angiver bevægelsen af en partikel. Når vi indsætter et tidspunkt (dvs. et tal) for t og regner højresiden ud, så får vi koordinatsættet (x, y) til det punkt hvor partiklen er på det pågældende tidspunkt.

Bestem koordinatsættet til det punkt P_4 på l hvor partiklen er på tidspunktet 4.

Bestem koordinatsættet til det punkt P_t på l hvor partiklen er på tidspunktet t.

Der er givet punktet $A(4,1)$.

Bestem koordinatsættet til vektoren $\overrightarrow{P_t A}$.

Bestem t så $\overrightarrow{P_t A}$ er vinkelret på l, og benyt resultatet til at bestemme koordinatsættet til det punkt P på l for hvilket $\overrightarrow{PA}$ er vinkelret på l.

Bestem koordinatsættet til det punkt R på l for hvilket $\overrightarrow{RA}$ er parallel med vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

En linje m har ligningen

$$x - 2y + 20 = 0 .$$

Undersøg om punktet $B(-8, 6)$ ligger på linjen m.

Bestem t så P_t ligger på m, og benyt resultatet til at bestemme koordinatsættet til skæringspunktet mellem l og m.

En linje n har parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad t \in \mathrm{R} .$$

En partikels bevægelse er fastlagt ved denne parameterfremstilling. Bestem koordinatsættet til det punkt Q_s på n hvor partiklen er på tidspunktet s.

Bestem de to tal t og s for hvilke $P_t = Q_s$, og benyt resultatet til at bestemme koordinatsættet til skæringspunktet mellem l og n.

Vektorer i planen – Opgavesæt nr. 5 af 5

Dette opgavesæt er et eksempel på hvordan en prøve kan se ud når der er 45 minutter til delprøven uden hjælpemidler og 45 minutter til delprøven med hjælpemidler.

VP 15 (Uden hjælpemidler)

a) Der er givet to punkter $A(3,1)$ og $B(-1,-5)$ samt en vektor $\vec{v}=\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$.

Bestem koordinatsættet til vektoren $\overrightarrow{AB}$.

Bestem arealet af det parallelogram som udspændes af $\overrightarrow{AB}$ og $\vec{v}$.

b) To vektorer er bestemt ved

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} \text{ og } \vec{b}=\begin{pmatrix}1-t\\4\end{pmatrix}.$$

Bestem t så $\vec{a}$ er parallel med $\vec{b}$.

c) Bestem længden af vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}-3\\2t\end{pmatrix}$.

d) En linje l er givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\12\end{pmatrix} \quad , \quad t\in\mathsf{R}.$$

Gør rede for at vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ står vinkelret på l.

e) Der er givet to punkter $A(2,0)$ og $B(3,-2)$.

Bestem en ligning for linjen gennem punkterne A og B.

f) To linjer l og m er givt ved

$$l: \quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix} \quad , \quad t\in\mathsf{R}$$

$$m: \quad \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \quad , \quad s\in\mathsf{R}$$

Bestem koordinatsættet til skæringspunktet mellem l og m.

Opgavesættet fortsætter på næste side!

VP 16 (Med hjælpemidler)

Der er givet to vektorer

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestem $\left| \vec{b} - \vec{a} \right|$.

Bestem gradtallet for vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b} - \vec{a}$.

Bestem t så projektionen af $t\vec{b}$ på $\vec{a}$ er vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

VP 17 (Med hjælpemidler)

For $t \neq -4$ er et parallelogram $ABCD$ bestemt ved

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \ , \quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2-3t \\ -3+t \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad A(5,3)\,.$$

Bestem de værdier af t for hvilke parallelogrammets areal er 5.

Bestem den værdi af t for hvilke punkterne A, D og $E(-1,2)$ ligger på linje.