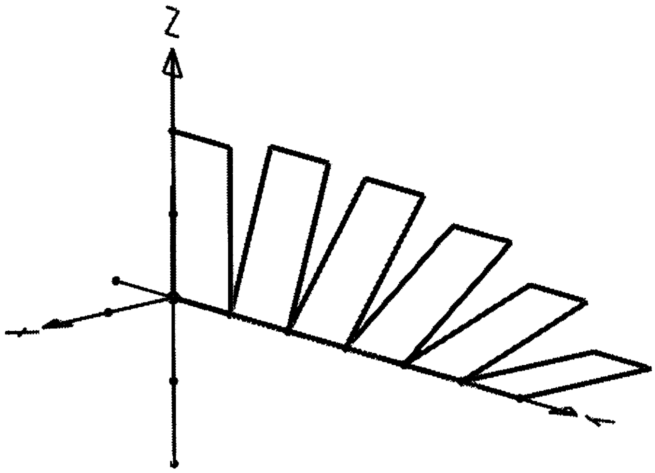
Tredimensional grafik



2006 Karsten Juul

Indhold

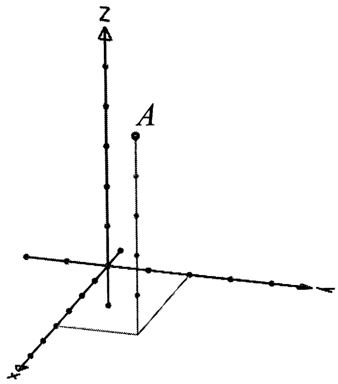
Tredimensional grafik, 1. udgave

I Homogene koordinatsæt og gangning af matricer

Vi vil få computeren til at ændre figurer i rummet ved at forskyde, dreje og/eller ændre størrelse.

Så må vi kunne beregne koordinatsættet til det punkt som et givet punkt føres over i.

Dette hæfte går ud på at indføre en teknik til dette.



Figur 1

På figur 1 er vist punktet $A(4, 2, 5)$. I den beregningsteknik vi vil bruge, skriver man A sådan:

(1)
$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Her er de tre øverste tal A's koordinater. Det nederste tal skal altid være 1.

Definition 1. **Normaliseret homogent koordinatsæt**

Det normaliserede homogene koordinatsæt for et punkt $P(x, y, z)$ er 4×1 matricen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Uanset hvordan vi forskyder, drejer og/eller ændrer størrelse, vil vi beregne det punkt A føres over i, ved at gange søjlematricen med en kvadratisk matrix. Følgende definition viser hvordan man ganger.

Definition 2. **Gange koordinatsæt fra venstre med 4×4 matrix**

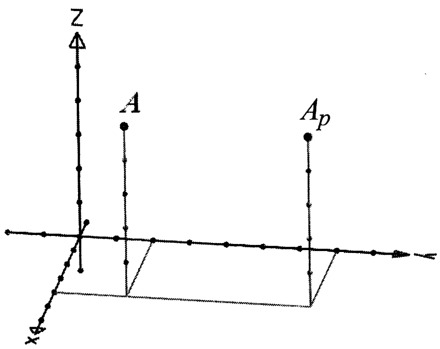
$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by+cz+d\cdot 1 \\ ex+fy+gz+h\cdot 1 \\ ix+jy+kz+l\cdot 1 \\ mx+ny+oz+p\cdot 1 \end{pmatrix} .$$

Resultatet af gangningen er altså en søjlematrix. Hvert af de fire tal i denne søjle er fremkommet ved skalarmultiplicere x,y,z,1-søjlen med en række i den kvadratiske matrix.

Vi vil bruge definition 2 til at gange A's koordinatsæt (1) med en matrix:

(2)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 4+0\cdot 2+0\cdot 5+0\cdot 1 \\ 0\cdot 4+1\cdot 2+0\cdot 5+5\cdot 1 \\ 0\cdot 4+0\cdot 2+1\cdot 5+0\cdot 1 \\ 0\cdot 4+0\cdot 2+0\cdot 5+1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Altså føres A over i punktet $A_p(4,7,5)$. Figur 2 viser både A og A_p.



Figur 2

Hvis vi i (2) erstatter A med et vilkårligt punkt $P(x, y, z)$, fås:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y+5 \\ z \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Heraf ses at når et punkts koordinatsæt ganges med denne matrix, så vil punktet blive forskudt stykket 5 i y-aksens retning.

II Mathcad

Matricen vi gangede med ovenfor, kan vi fx kalde P_y. I Mathcad kan dette skrives sådan:

$$P_y := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bemærk: Indekset $_y$ SKAL skrives ved at taste et punktum for at undgå unødige problemer.

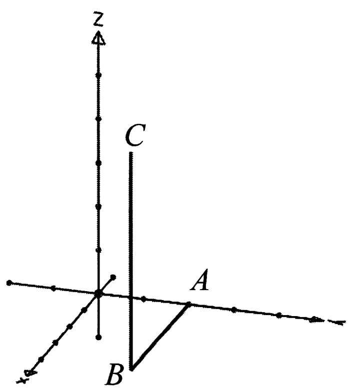
Herefter kan vi få udregnet A_p 's koordinatsæt sådan:

$$P_y \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Umiddelbart kan det virke upraktisk at skulle udføre dette for at få lagt 5 til *y*-koordinaten. Teknikken er dog en stor fordel i nogle tilfælde, fx hvis man skiftevis drejer og forskyder.

III RumFig2b

I dette hæfte bruges Mathcad-dokumentet RumFig2b, som kan downloades fra *www.mat1.dk* .



Figur 3

I RumFig2b kan man få tegnet den L-formede figur ABC på figur 3 ved at taste

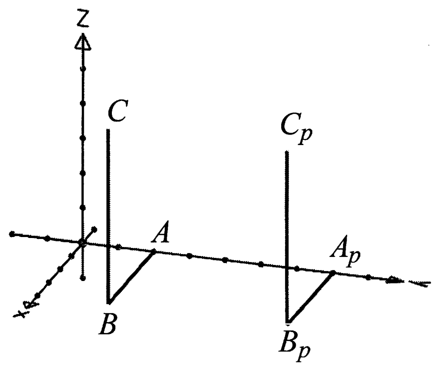
$$D := \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

De tre søjler i denne matrix er punkterne A, B og C. Det første punkt forbindes med det andet, og det andet med det tredje. Hvis man også vil have C forbundet med A så der fremkommer en trekant, må man tilføje en fjerde søjle der indeholder A's koordinatsæt.

Det er ikke kun bogstavet D der på den måde kan bruges til at få tegnet en figur. Man kan bruge følgende bogstaver

$$D, E, F, G, H, M, N\ .$$

Disse 7 figurer har plotnumrene 23-29. Når du dobbeltklikker på figuren og vælger det relevante plotnummer, kan du bl.a. ændre farve og stregtykkelse.



Figur 4

Figur 4 viser den figur $A_p B_p C_p$ der fremkommer når L'et ABC parallelforskydes 5 i y-aksens retning.

For at få tegnet $A_p B_p C_p$ skal vi have en matrix hvor søjlerne er koodinatsættene til A_p, B_p og C_p. Disse koordinatsæt fås ved at gange søjlerne i D med P_y. I dokumentet RumFig2b kan dette gøres ved at skrive

$$E := \text{gang}(P_y, D)\ .$$

Da E er en af de bogstaver der kan bruges til at få tegnet en figur, vil figuren $A_p B_p C_p$ automatisk blive tegnet. Hvis vi taster E efterfulgt af et lighedstegn, kan vi se rækken af koordinatsøjler i E:

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 7 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

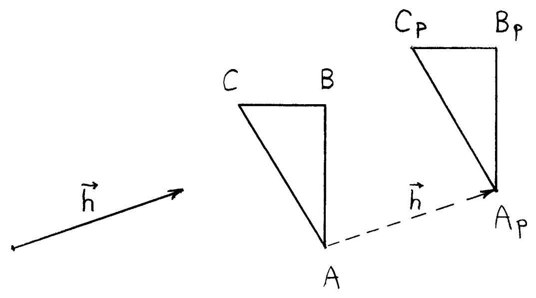
IV Parallelforskydning

Definition 3. Parallelforskydning

En "parallelforskydning med en vektor $\vec{h}$" fører ethvert punkt Q over i et punkt Q_p som er bestemt ved at

$$\overrightarrow{QQ_p} = \vec{h}\ .$$

Figur 5 viser en parallelforskydning med en vektor $\vec{h}$.



Figur 5

Sætning 1. Koordinatformel for parallelforskydning

Ved en parallelforskydning med en vektor $\vec{h} = \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix}$ føres et punkt $P(x, y, z)$ over i et punkt $Q(u, v, w)$ hvis koordinater kan udregnes sådan:

$$u = x + r$$
$$v = y + s$$
$$w = z + t \ .$$

Bevis for sætning 1

At P føres over i Q ved parallelforskydning med vektoren $\vec{h}$, betyder ifølge definition 3 at $\overrightarrow{PQ} = \vec{h}$. Heraf fås at

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OP} + \vec{h} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+r \\ y+s \\ z+t \end{pmatrix},$$

dvs. de tre ligninger i sætningen gælder.

Sætning 2. Matrix for parallelforskydning

Matricen svarende til en parallelforskydning med en vektor $\vec{h} = \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix}$ er

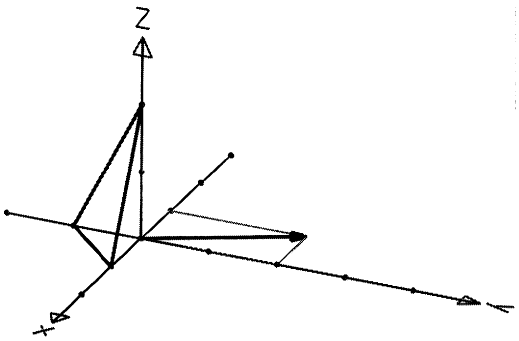
$$P_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & r \\ 0 & 1 & 0 & s \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Bevis **for sætning 2**

Vi bruger definition 2 til at udregne koordinatsættet til det punkt som et punkt $P(x, y, z)$ føres over i når det ganges med P_h:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & r\\0 & 1 & 0 & s\\0 & 0 & 1 & t\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot x+0\cdot y+0\cdot z+r\cdot 1\\0\cdot x+1\cdot y+0\cdot z+s\cdot 1\\0\cdot x+0\cdot y+1\cdot z+t\cdot 1\\0\cdot x+0\cdot y+0\cdot z+1\cdot 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+r\\y+s\\z+t\\1\end{pmatrix}$$

Ifølge sætning 1 er dette det punkt som $P(x, y, z)$ føres over i ved en parallelforskydning med vektoren $\vec{h} = \begin{pmatrix}r\\s\\t\end{pmatrix}$.



Figur 6

I RumFig2b kan man få tegnet trekanten på figur 6 ved at taste

$$D := \begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\0 & -1 & 0 & 0\\2 & 0 & 0 & 2\\1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Søjlerne i denne matrix er er de punkter som skal forbindes for at tegne trekanten.
Første punkt forbindes med andet, andet med tredje, og tredje med fjerde.

Vektoren på figuren er $\vec{v} = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$. I RumFig2b taster vi matricen svarende til parallelforskydningen med denne vektor:

$$P_v := \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\0 & 1 & 0 & 2\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Derefter taster vi

$$E := \text{gang}(P_v\,, D)\ .$$

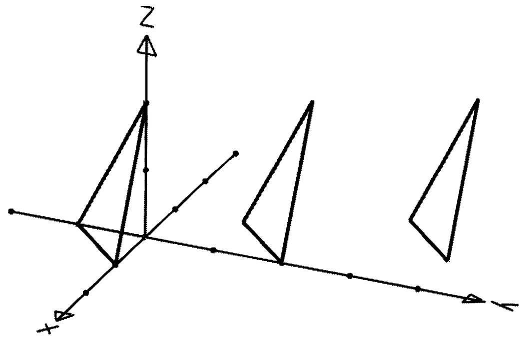
Søjlerne i E er altså fremkommet ved at gange søjlerne i D med P_v, dvs. ved at parallelforskyde punkterne i D. Altså er E er den trekant der fås ved at parallelforskyde trekanten D med vektoren v.

Nu taster vi

$$F := \text{gang}(P_v\,,\,E)\ \ .$$

dvs. F er trekanten der fås når E parallelforskydes med vektoren v.

På figur 7 er vist trekanterne D, E og F.



Figur 7

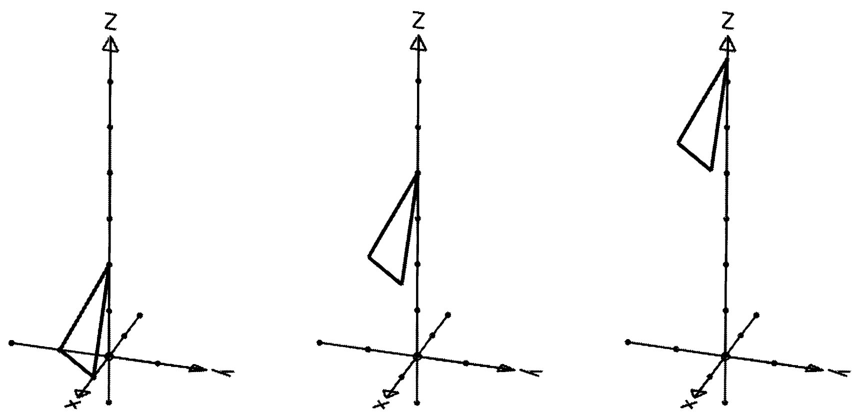
V Animation

En animation består af en række billeder der vises hurtigt efter hinanden. I Rumfig2b kan vi lave en animation ved først at taste

$$dz := \text{FRAME}\cdot 0.5 \qquad D_{start} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_z := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D := \text{gang}(P_z\,, D_{start})$$

og derefter vælge Værktøj/Animation/Optag, trække med musen for at markere hvad der skal med, lade FRAME løbe fra 0 til 9, og klikke på Animer. (Sørg for at den positive del af z-aksen har længden 7 eller mere, og sørg for at zoome ud så hele figuren ses).



Figur 8

FRAME = 0 FRAME = 4 FRAME = 9

Det ses at D_{start} er trekanten til venstre på figur 8, og at P_z er matricen svarende til en parallelforskydning stykket dz i z-aksens retning.

På billede nr. 5 i animationen er FRAME lig 4, så dz er 2. D er altså den figur der fås ved at parallelforskyde trekanten D_{start} stykket 2 i z-aksens retning.

På figur 8 er vist billede nr. 0, billede nr. 5 og billede nr. 9.

VI Kommandoen "stabel" i RumFig2b

På side 7 forskød vi en trekant D. Derefter forskød vi den fremkomne trekant E (se figur 7). Vi kunne have fortsat med at forskyde den tredje trekant F så der fremkom en fjerde trekant. Hvis vi vil danne mange trekanter ved at blive ved med at forskyde på denne måde, kan det være praktisk (og undertiden nødvendigt) at samle alle trekanterne i én figur så ét plotnummer, fx 23, er figuren bestående af alle trekanterne. Dette kan i RumFig2b gøres ved hjælp af stabel-kommandoen.

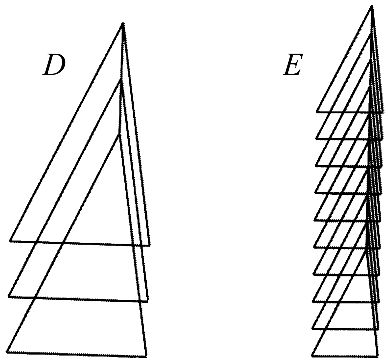
Hvis D_{start} er trekanten til venstre på figur 8, og P_z er matricen svarende til en parallelforskydning stykket 0,5 i z-aksens retning, så vil kommandoen

$$D := \text{stabel}(P_z, D_{start}, 3)$$

bevirke at D bliver figuren til venstre på figur 9. Tallet til sidst i stabel-kommandoen angiver hvor mange trekanter figuren skal bestå af. Hvis man skriver

$$E := \text{stabel}(P_z, D_{start}, 10)$$

tegnes figuren til højre på figur 9.



Figur 9

Hvis man skriver D efterfulgt af et lighedstegn, kan man se den række punkter som D består af:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 2.5 & 0.5 & 0.5 & 2.5 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

De første 4 søjler i D er den nederste trekant. De næste 4 er den midterste af de tre trekanter. Sidste punkt i første trekant og første punkt i anden trekant står ved siden af hinanden i D, så de to punkter forbindes med en streg.

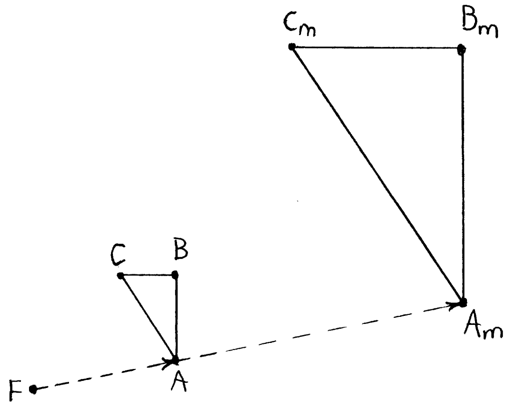
VII Multiplikation ud fra punkt

Definition 4. **Multiplikation ud fra punkt**

En "multiplikation med et tal k ud fra et punkt F " fører ethvert punkt P over i et punkt Q som er bestemt ved at

$$\overrightarrow{FQ} = k \cdot \overrightarrow{FP}.$$

Figur 10 viser en multiplikation ud fra punktet F med tallet 3. Trekanten ABC føres over i trekanten $A_m B_m C_m$. De to trekanter er ligedannede, og forstørrelsesfaktoren er 3.



Figur 10

Sætning 3. **Koordinatformel for multiplikation ud fra punkt**

Ved en multiplikation med et tal k ud fra et punkt $F(a, b, c)$ føres et punkt $P(x, y, z)$ over i et punkt $Q(u, v, w)$ hvis koordinater kan udregnes sådan:

$$u = k \cdot x + (1-k) \cdot a$$
$$v = k \cdot y + (1-k) \cdot b$$
$$w = k \cdot z + (1-k) \cdot c.$$

Bevis **for sætning 3**

At P føres over i Q ved multiplikation med et tal k ud fra et punkt F , betyder ifølge definition 4 at $\overrightarrow{FQ} = k \cdot \overrightarrow{FP}$. Heraf fås at

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FQ} = \overrightarrow{OF} + k \cdot \overrightarrow{FP} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a + k(x-a) \\ b + k(y-b) \\ c + k(z-c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx + (1-k)a \\ ky + (1-k)b \\ kz + (1-k)c \end{pmatrix},$$

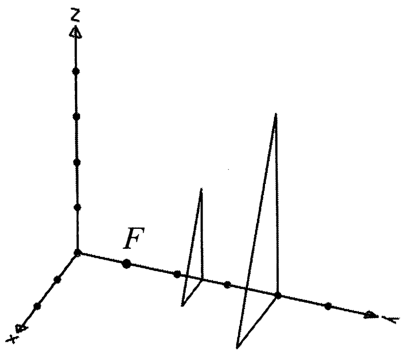
dvs. de tre ligninger i sætningen gælder.

Den lille trekant på figur 11 føres over i den store ved en multiplikation ud fra punktet $F(0,1,0)$ med tallet 2. Ifølge sætning 3 vil koordinatformlen for denne multiplikation være

$$\begin{aligned} u &= 2\cdot x + (1-2)\cdot 0 \\ v &= 2\cdot y + (1-2)\cdot 1 \\ w &= 2\cdot z + (1-2)\cdot 0 \end{aligned}$$

dvs.

$$\begin{aligned} u &= 2x \\ v &= 2y - 1 \\ w &= 2z\,. \end{aligned}$$



Figur 11

Sætning 4. Matrix for multiplikation

Matricen svarende til en multiplikation ud fra et punkt $F(a,b,c)$ med et tal k er

$$M_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & (1-k)a \\ 0 & k & 0 & (1-k)b \\ 0 & 0 & k & (1-k)c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bevis for sætning 4

Vi bruger definition 2 til at udregne koordinatsættet til det punkt som et punkt $P(x, y, z)$ føres over i når det ganges med M_k :

$$\begin{pmatrix} k & 0 & 0 & (1-k)a \\ 0 & k & 0 & (1-k)b \\ 0 & 0 & k & (1-k)c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\cdot x + 0\cdot y + 0\cdot z + (1-k)a\cdot 1 \\ 0\cdot x + k\cdot y + 0\cdot z + (1-k)b\cdot 1 \\ 0\cdot x + 0\cdot y + k\cdot z + (1-k)c\cdot 1 \\ 0\cdot x + 0\cdot y + 0\cdot z + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx + (1-k)a \\ ky + (1-k)b \\ kz + (1-k)c \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ifølge sætning 3 er dette det punkt som $P(x, y, z)$ føres over i ved en multiplikation ud fra et punkt $F(a,b,c)$ med et tal k .

For at få figur 11 frem i RumFig2b kan vi taste

$$D := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2.5 & 2.5 & 2.5 & 2.5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_2 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E := \text{gang}(M_2, D)$$

hvor D er den lille trekant, E er den store trekant, og M_2 er matricen svarende til multiplikationen ud fra $F(0,1,0)$ med tallet 2.

VIII Drejning om koordinatakse

Definition 5. **Drejning om koordinatakse**

Når rummet drejes om en af koordinatakserne, så angiver et positivt gradtal en drejning der ses at være mod uret når man ser fra aksens spids ind mod begyndelsespunktet. Et negativt gradtal angiver en drejning i den modsatte retning.

Sætning 5. **Koordinatformel for drejning om *x*-aksen**

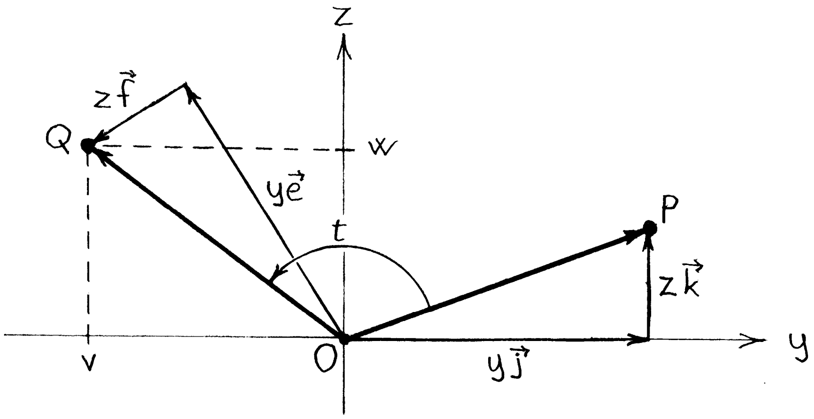
Når rummet drejes en vinkel t om x-aksen, så føres et punkt $P(x, y, z)$ over i et punkt $Q(u, v, w)$ hvis koordinater kan udregnes sådan:

$$u = x$$

$$v = y \cdot \cos(t) - z \cdot \sin(t)$$

$$w = y \cdot \sin(t) + z \cdot \cos(t).$$

Bevis **for sætning 5**



Figur 12

Ved en drejning om x-aksen er det klart at hvis $P(0, y, z)$ føres over i $Q(0, v, w)$, så vil $P(x, y, z)$ føres over i $Q(u, v, w)$ hvor $u = x$.

På figuren er vist punktet $P(0,y,z)$ og det punkt $Q(0,v,w)$ som P føres over i når rummet drejes vinklen t om *x*-aksen.

Ved denne drejning føres vektorerne $\vec{j}$ og $\vec{k}$ over i hhv.

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t+90°) \\ \sin(t+90°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Da

$$\overrightarrow{OP} = y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$$

er

$$\overrightarrow{OQ} = y \cdot \vec{e} + z \cdot \vec{f}.$$

Derfor er

$$\begin{pmatrix} 0 \\ v \\ w \end{pmatrix} = y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \cdot \cos(t) - z \cdot \sin(t) \\ y \cdot \sin(t) + z \cdot \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Sætning 6. Koordinatformel for drejning om *y*-aksen

Når rummet drejes en vinkel t om *y*-aksen, så føres et punkt $P(x,y,z)$ over i et punkt $Q(u,v,w)$ hvis koordinater kan udregnes sådan:

$$u = x \cdot \cos(t) + z \cdot \sin(t)$$

$$v = y$$

$$w = -x \cdot \sin(t) + z \cdot \cos(t).$$

Sætning 7. Koordinatformel for drejning om *z*-aksen

Når rummet drejes en vinkel t om z-aksen, så føres et punkt $P(x,y,z)$ over i et punkt $Q(u,v,w)$ hvis koordinater kan udregnes sådan:

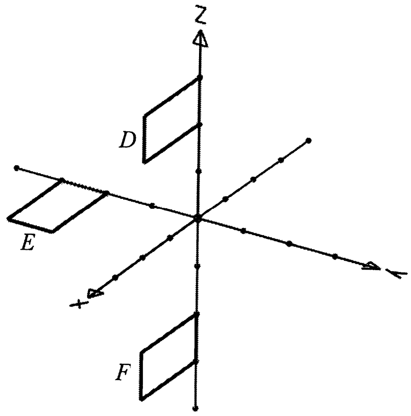
$$u = x \cdot \cos(t) - y \cdot \sin(t)$$

$$v = x \cdot \sin(t) + y \cdot \cos(t)$$

$$w = z.$$

Ud fra sætningerne 5-7 kan de tilsvarende matricer uden videre opskrives. Fx vil matricen svarende til at dreje vinklen t om *x*-aksen være

$$X_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ 0 & \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Figur 13

Rektanglet D på figur 13 fremkommer når vi taster

$$D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Ved en drejning på $90°$ om x-aksen vil D føres over i E, og E vil føres over i F.
Matricen svarende til en drejning på $90°$ om x-aksen er

$$X_{90} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(90\,\mathrm{deg}) & -\sin(90\,\mathrm{deg}) & 0 \\ 0 & \sin(90\,\mathrm{deg}) & \cos(90\,\mathrm{deg}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Da $\cos(90°) = 0$ og $\sin(90°) = 1$, kunne vi også have tastet

$$X_{90} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Rektanglerne E og F fremkommer når vi taster

$$E := \mathrm{gang}(X_{90}, D) \qquad F := \mathrm{gang}(X_{90}, E) .$$

IX Sammensætte parallelforskydninger, multiplikationer og drejninger

Definition 6. **Gangning af matricer**

Produktet af to maricer

$$M_1 = \begin{pmatrix} a1 & a2 & a3 & a4 \\ b1 & b2 & b3 & b4 \\ c1 & c2 & c3 & c4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad M_2 = \begin{pmatrix} d1 & d2 & d3 & d4 \\ e1 & e2 & e3 & e4 \\ f1 & f2 & f3 & f4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

er den 4×4 matix $M \ = \ M_1 \cdot M_2$ som er fastlagt ved at

1. søjle i M fås ved at gange 1. søjle i M_2 med M_1 fra venstre,

2. søjle i M fås ved at gange 2. søjle i M_2 med M_1 fra venstre,

Osv.

Sætning 8.

For matricerne

$$r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} , \quad M_1 = \begin{pmatrix} a1 & a2 & a3 & a4 \\ b1 & b2 & b3 & b4 \\ c1 & c2 & c3 & c4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad M_2 = \begin{pmatrix} d1 & d2 & d3 & d4 \\ e1 & e2 & e3 & e4 \\ f1 & f2 & f3 & f4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gælder

$$(M_2 \cdot M_1) \cdot r \ = \ M_2 \cdot (M_1 \cdot r) \ .$$

Bevis **for sætning 8**

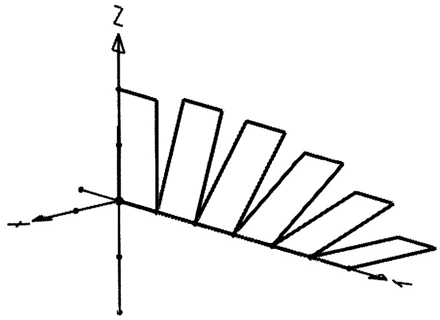
Vi får Mathcad til at foretage en symbolsk udregning af differensen mellem de to søjlematricer $(M_2 \cdot M_1) \cdot r$ og $M_2 \cdot (M_1 \cdot r)$. Det viser sig at resultatet bliver $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Hermed er sætningen bevist.
(Man kan få foretaget udregningen ved at definere r , M_1 og M_2 som angivet i sætningen og derefter taste $(M_2 \cdot M_1) \cdot r \ - \ M_2 \cdot (M_1 \cdot r)$ og vælge "enkel" på symbolsk-paletten).

Ved en drejning på $-18°$ om y-aksen føres et punkt A over i et punkt B , og ved en parallelforskydning stykket 1 i y-aksens retning føres B over i et punkt C .

Lad Y_{m18} være matricen der svarer til en drejning på $-18°$ om y-aksen, og lad P_y være matricen der svarer til en parallelforskydning stykket 1 i y-aksens retning. Lad desuden S_{pd} være produktet $P_y \cdot Y_{m18}$.

Hvis vi ganger A's koordinatsøjle med Y_{m18} fra venstre, og ganger resultatet med P_y fra venstre, må vi få C's koordinatsøjle. Ifølge sætning 8 kan vi derfor også få C ved at gange A med S_{pd}.



Figur 14

Hvis D_{start} er matricen svarende til det venstre rektangel på figur 14, kan vi få tegnet det næste rektangel ved at taste $D := \text{gang}(S_{pd}, D_{start})$. En gangning med S_{pd} svarer til en drejning efterfulgt af en parallelforskydning.

Det ses at hvert rektangel på figur 14 kan fås af det foregående ved gangning med S_{pd}. Vi kan derfor få hele figuren frem ved at taste $D := \text{stabel}(S_{pd}, D_{start}, 6)$.

X Drejning om vilkårlig linje

Lad A og B være to forskellige punkter på en linje l. Vi vil nu angive hvordan man kan finde matricen der svarer til at dreje vinklen v om l sådan at positivt v svarer til en drejning mod uret når man ser fra B mod A.

Da vi ikke har formler for at dreje om andre linjer end koordinatakserne, vil vi flytte l over i en koordinatakse, dreje om denne, og derefter flytte l tilbage.

Flytningen af l må foregå i en række trin hvor hvert trin svarer til en matrix vi kender. Til sidst kan vi gange alle matricerne for at få den matrix der svarer til drejningen om l.

Den søgte drejning kan fx fås frem på følgende måde:

(1) Parallelforskyd med en vektor $\vec{r}$ så A føres over i koordinatsystemets begyndelsespunkt.

(2) Drej en vinkel s om y-aksen så B kommer til at ligge i yz-planen.

(3) Drej en vinkel t om x-aksen så B kommer til at ligge på z-aksens positive del.

(4) Drej vinklen v om z-aksen.

(5) Drej vinklen $-t$ om x-aksen.

(6) Drej vinklen $-s$ om y-aksen.

(7) Parallelforskyd med vektoren $-\vec{r}$.

Som et eksempel på denne metode vil vi finde matricen svarende til en drejning om linjen m der går gennem punkterne $A(3,-2,1)$ og $B(-1,1,6)$. Drejningen skal være på $53°$, og set fra B mod A skal den foregå mod uret.

Punkt (1)

Først skal parallelforskydes så A føres over i $O(0,0,0)$, dvs. med vektoren $\vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Matricen svarende til denne parallelforskydning er

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Punkt (2)

Ved parallelforskydningen med vektoren $\vec{r}$ føres B over i punktet $B_p(-4,3,5)$. Vi skal dreje om y-aksen så B_p føres over i yz-planen. Af B's koordinater ses at drejningsvinklen er $s = \tan^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$. Matricen svarende til denne drejning er

$$Y_1 = \begin{pmatrix} \cos(s) & 0 & \sin(s) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(s) & 0 & \cos(s) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Punkt (3)

Ved drejningen om y-aksen føres B_p over i punktet $B_y(0,3,\sqrt{41})$, hvor $\sqrt{41}$ er udregnet som afstanden fra B_p til y-aksen, dvs til $C(0,3,0)$.

Vi skal nu foretage den drejning om x-aksen som fører B_y over i et punkt på z-aksens positive del. Af B_y's koordinater ses at drejningsvinklen må være $t = \tan^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{41}}\right)$.

Matricen svarende til denne drejning er

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ 0 & \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Punkt (4)

Herefter skal vi dreje $53°$ om z-aksen. Matricen svarende til denne drejning er

$$Z = \begin{pmatrix} \cos(53°) & -\sin(53°) & 0 & 0 \\ \sin(53°) & \cos(53°) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Punkt (5)

Vi skal dreje vinklen $-t$ om x-aksen. Da $\cos(-t) = \cos(t)$ og $\sin(-t) = -\sin(t)$, er matricen svarende til denne drejning

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(t) & \sin(t) & 0 \\ 0 & -\sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Punkt (6)

Vi skal dreje vinklen $-s$ om y-aksen. Matricen svarende til denne drejning er

$$Y_2 = \begin{pmatrix} \cos(s) & 0 & -\sin(s) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin(s) & 0 & \cos(s) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Punkt (7)

Til sidst skal vi parallelforskyde med vektoren $-\vec{r}$. Matricen svarende hertil er

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Den søgte matrix

Matricen svarende til drejningen på $53°$ om m kan nu beregnes sådan:

$$M = P_2 \cdot Y_2 \cdot X_2 \cdot Z \cdot X_1 \cdot Y_1 \cdot P_1 .$$