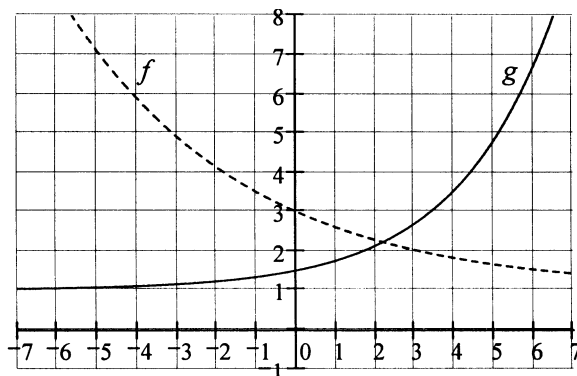


Tal, funktioner og grænseværdi

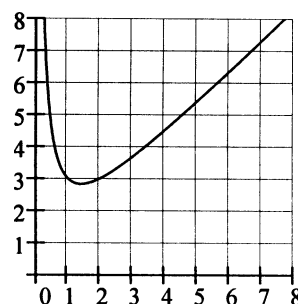
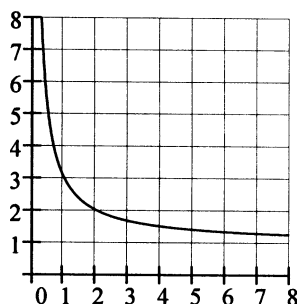
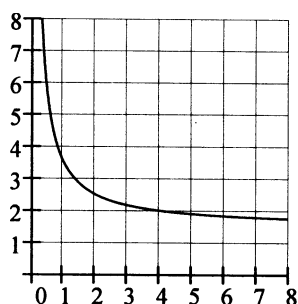
Skriv færdig-eksempler der kan udgøre en væsentlig del af et forløb der skal give indsigt vedrørende begrebet grænseværdi og nogle nødvendige forudsætninger om tal og funktioner



Udgave 1: 8/8-04

Udgave 2: 8/9-04

1. Her er vist graferne for tre funktioner:



Der er kun én af graferne som opfylder:

For ethvert punkt på grafen gælder:

*Punktets 2.koordinat **er lig** det tal der fås når man dividerer 2 med punktets 1.koordinat og til resultatet lægger 1.*

Find ud af hvilken af graferne der opfylder dette, og skriv f ved grafen.

2. I opgave 1 er to linjer skrevet med kursiv. Disse to linjer med kursiv er en ligning. Når vi lader x og y betyde 1.koordinat og 2.koordinat, kan vi skrive denne ligning med symboler. Skriv den her:

_____ .

3. Du har skrevet f ved én af de tre grafer. Skriv g ved den første af de andre to grafer, og skriv h ved den sidste af graferne.

I opgave 1 er der med ord skrevet en ligning for grafen for f . Her fik man 2.koordinaten ved at lave en udregning og lægge 1 til resultatet. Hvis man i stedet for 1 lægger et større tal til, så bliver 2.koordinaten større, dvs. grafen ligger højere oppe i koordinatsystemet. Skriv med ord en ligning for grafen for g :

Skriv med symboler en ligning for g :

_____ .

4. I opgave 1 er der med ord skrevet en ligning for grafen for f . Her fik man 2.koordinaten ved at lave en udregning og lægge 1 til resultatet. Hvis man i stedet for at lægge 1 til lægger noget til der ikke er en konstant, så kan man få grafen for h frem. Skriv med ord en ligning for grafen for h :

Skriv med symboler en ligning for h :

_____ .

5. Lad P være det punkt på 1.aksen som har 1.koordinat 5, og lad A være det punkt på grafen for f som har 1.koordinat 5.

Afsæt punkterne P og A på den relevante af figurerne i opgave 1.

Beregn derefter afstanden mellem P og A , og skriv en mellemregning og facit her:

$$|PA| = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

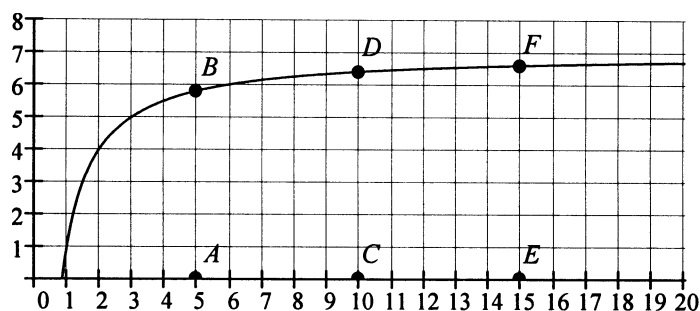
6. Lad stadig P være det punkt på 1.aksen som har 1.koordinat 5, og lad B være det punkt på grafen for g som har 1.koordinat 5.

Afsæt punkterne P og B på den relevante af figurerne i opgave 1.

Beregn derefter afstanden mellem P og B , og skriv en mellemregning og facit her:

$$|PB| = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

7. Figuren nedenfor viser grafen for en ny funktion f .



For ethvert punkt på grafen gælder:

Punktets 2.koordinat er lig det tal der fås når man fra 7 trækker det tal der fås når seks divideres med punktets 1.koordinat

Skriv denne ligning med symboler her:

$$\underline{\hspace{2cm}}.$$

Beregn følgende afstande:

$$|AB| =$$

$$|CD| =$$

$$|EF| =$$

8. Grafen for f i opgave 7 fortsætter uendelig langt mod højre.

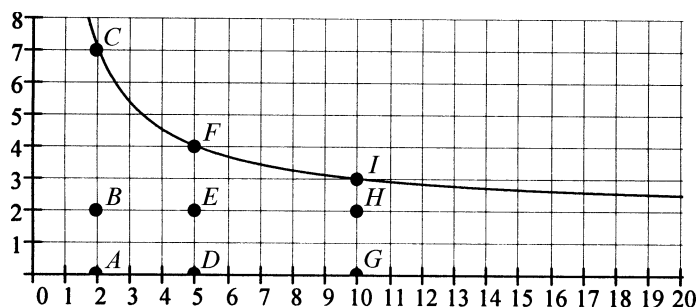
Undersøg om der findes et punkt på grafen for f hvis 2.koordinat afviger mindre end 0.001 fra 7. Hvis du finder sådan et punkt, så skriv dets koordinatsæt. Hvis du ikke finder sådan et punkt, så skriv en begrundelse for at der ikke eksisterer sådan et punkt. Skriv her:

9. Funktionen f fra opgave 7 har de positive tal som definitions­mængde. Der er altså ikke punkter på grafen der har et negativt tal som 1.koordinat.

Undersøg om der findes et punkt på grafen for f hvis 2.koordinat er større end 7. Hvis du finder sådan et punkt, så skriv dets koordinatsæt. Hvis du ikke finder sådan et punkt, så skriv en begrundelse for at der ikke eksisterer sådan et punkt. Skriv her:

|

10. Figuren viser grafen for en funktion f :



Udfyld de tomme pladser:

$|BC|$ fås når tallet _____ divideres med 1.koordinaten for C .

$|EF|$ fås når tallet _____ divideres med 1.koordinaten for F .

$|HI|$ fås når tallet _____ divideres med 1.koordinaten for I .

C 's 2.koordinat er lig $|AB| + |BC| = \underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$.

F 's 2.koordinat er lig $|DE| + |EF| = \underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$.

I 's 2.koordinat er lig $|GH| + |HI| = \underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$.

De foregående linjer antyder at en bestemt regel gælder for alle punkter på grafen. Gå ud fra at dette er tilfældet.

Lad J være det punkt på grafen hvis 1.koordinat er 50.

J 's 2.koordinat er _____ .

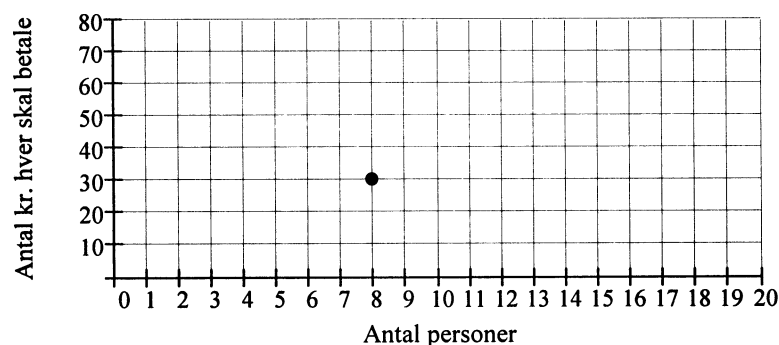
Når 1.koordinaten til et punkt på grafen er et tal t , så er punktets 2.koordinat lig _____ .

Grafen har ligningen _____ .

11. Funktionen f fra opgave 10 har de positive tal som definitions­mængde. Der er altså ikke punkter på grafen der har et negativt tal som 1.koordinat.

Undersøg om der findes et punkt på grafen hvis 2.koordinat er 2,002. Hvis der er sådan et punkt, skal du skrive dets 1.koordinat. Ellers skal du skrive en begrundelse for at der ikke er sådan et punkt på grafen. Skriv her:

12. På internettet kan man bestille billetter til en koncert hvor prisen pr. person er 23 kr. Ud over de 23 kr. pr. person skal der betales et gebyr på 56 kr. Hvis fx 8 bestiller sammen, så er der 8 til at dele udgiften til gebyret, dvs. hver person skal betale 30 kr. for at komme til koncerten. Denne oplysning er nedenfor brugt til at afsætte ét punkt på en graf der viser hvordan prisen aftager når flere bestiller sammen.



Beregn nogle flere punkter på grafen og tegn grafen.

Der skal være _____ personer som bestiller sammen, hvis prisen hver skal betale, skal være 23,50 kr.

En ligning for grafen: _____ .

13. På internettet er der udsalg af musik-cd'er. Hver dag nedsættes priserne 10%.

Prisen på en cd skal ganges med _____ for at få prisen næste dag.

Prisen på en cd skal ganges med _____ for at få prisen om 2 dage.

Heraf ses at på 2 dage falder prisen lidt mindre end 20% .

Prisen skal ganges med _____ for at få prisen om 3 dage.

Prisen skal ganges med _____ for at få prisen om n dage.

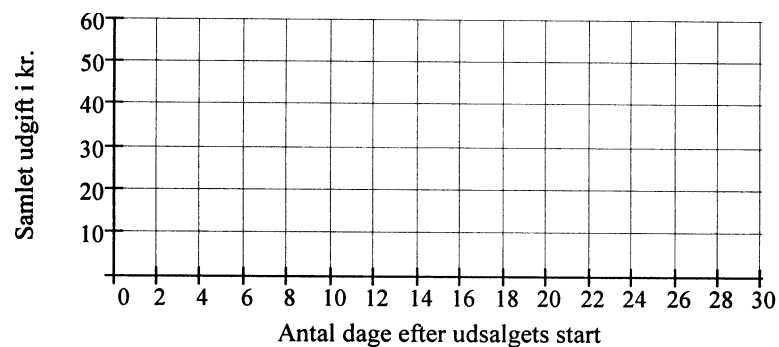
En cd koster 39,80 kr. den første dag, Prisen efter x dage er $y =$ _____ .

Der går _____ dage før prisen er under 10 kr.

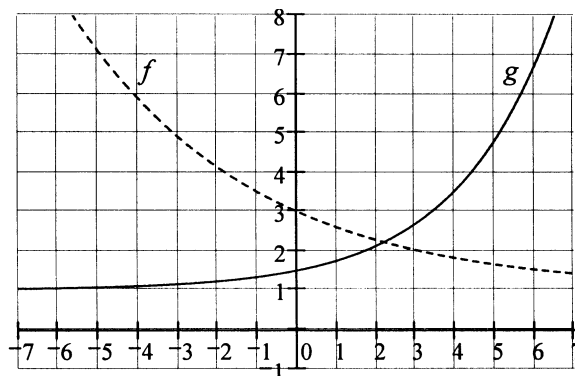
Uanset hvornår man køber cd'en, skal man betale 12 kr. for at få den sendt, så den samlede udgift ved at købe cd'en er 12 kr. større end dens pris.

Den samlede udgift x dage efter start er $y =$ _____ .

Grafen der har denne ligning, skal du tegne i koordinatsystemet nedenfor.



14. Figuren viser graferne for to funktioner f og g .



Nedenfor er med ord formuleret en ligning for hver af graferne. Find ud af hvilken graf der hører til hvilken ligning, og skriv de korrekte funktionsnavne på de tomme pladser.

For ethvert punkt på grafen for _____ gælder:

Punktets 2.koordinat er lig det tal der fås når man opløfter 0,8 til punktets 1.koordinat, ganger resultatet med 2, og til det fremkomne tal lægger 1.

For ethvert punkt på grafen for _____ gælder:

Punktets 2.koordinat er lig det tal der fås når man opløfter 1,5 til punktets 1.koordinat, ganger resultatet med 0.5, og til det fremkomne tal lægger 1.

Funktionen f er defineret for alle reelle tal, dvs. ethvert tal på 1.aksen er 1.koordinat til et punkt på grafen for f . Ikke alle tal på 2.aksen er 2.koordinat til et punkt på grafen for f . De tal der er 2.koordinat til et punkt på grafen for f , udgør intervallet _____.

Funktionen g er defineret for alle reelle tal, dvs. ethvert tal på 1.aksen er 1.koordinat til et punkt på grafen for g . Ikke alle tal på 2.aksen er 2.koordinat til et punkt på grafen for g . De tal der er 2.koordinat til et punkt på grafen for g , udgør intervallet _____.

Skriv med symboler en ligning for hver af graferne:

Ligning for grafen for f : _____.

Ligning for grafen for g : _____.

15. I tabellen nedenfor er angivet værdien af funktionen $4 + \frac{1}{x}$ for forskellige værdier af x . Tallene i tabellen tyder på at værdien af $4 + \frac{1}{x}$ kan komme lige så tæt på 4 det skal være, hvis man vælger tilstrækkelig store værdier af x .

Opgaven fortsætter på næste side!

x	2	10	100	1000
$4 + \frac{1}{x}$	4,5	4,1	4,01	4,001

Vi kan indse at dette er rigtig:

Forskellen på $4 + \frac{1}{x}$ og 4 er $\frac{1}{x}$, og

$\frac{1}{x}$ er mindre end _____ hvis x er større end tusind,

$\frac{1}{x}$ er mindre end _____ hvis x er større end en million,

osv.

Det at $4 + \frac{1}{x}$ kan komme lige så tæt på 4 det skal være, hvis man vælger tilstrækkelig store værdier af x , udtrykkes ved at sige at

$4 + \frac{1}{x}$ går mod 4 for x gående mod ∞ .

Med symboler skrives dette sådan:

$4 + \frac{1}{x} \rightarrow 4$ for $x \rightarrow \infty$.

Bemærk at den første pil læses "går mod" og den anden pil læses "gående mod".

16. I tabellen nedenfor er angivet værdien af funktionen $1,01 + 0,93^x$ for forskellige værdier af x . Tallene i tabellen tyder på at værdien af $1,01 + 0,93^x$ kan komme lige så tæt på 1 det skal være, hvis man vælger tilstrækkelig store værdier af x .

x	5	10	30	100
$1,01 + 0,93^x$	1,706	1,494	1,123	1,011

Men dette er ikke rigtigt. For enhver værdi af x vil værdien af $1,01 + 0,93^x$ afvige mere end _____ fra 1.

Der gælder altså ikke at $1,01 + 0,93^x$ går mod 1 for x gående mod ∞ .

Derimod gælder at

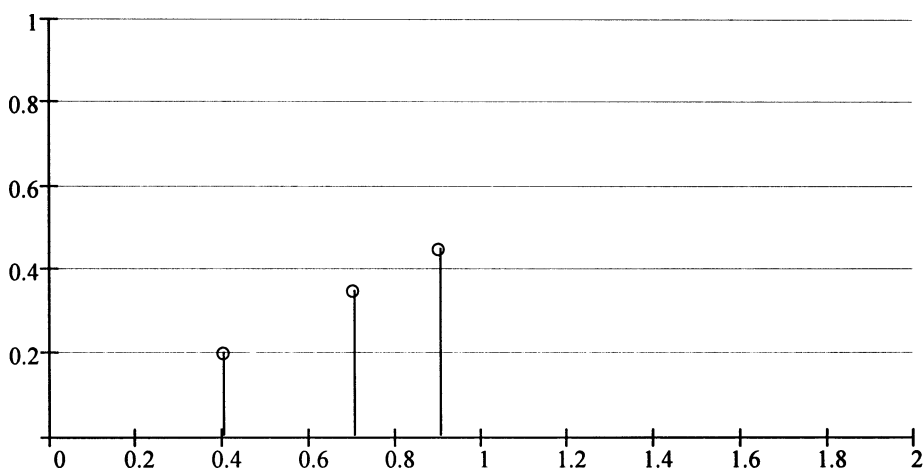
$1,01 + 0,93^x \rightarrow$ _____ for $x \rightarrow \infty$.

17. Funktionen $\frac{x^2 - x}{2x - 2}$ er ikke defineret for x lig _____ da _____.

Vi vil udregne funktionen for værdier af x der ligger tæt ved 1. Vi begynder med værdier af x der er mindre end 1:

x	0,4	0,7	0,9
$\frac{x^2 - x}{2x - 2}$	0,2	0,35	0,45

Disse værdier af funktionen er afsat som stolper nedenfor.



Udfyld de tomme pladser i tabellen nedenfor og afsæt de fundne værdier af funktionen som stolper i koordinatsystemet ovenfor.

x	0,95	0,98	0,99
$\frac{x^2 - x}{2x - 2}$			

Det ser ud til at vi kan få værdien af $\frac{x^2 - x}{2x - 2}$ så tæt på $\frac{1}{2}$ det skal være ved at vælge x tilstrækkelig tæt på 1. For at undersøge om dette er rigtigt, vil vi først reducere udtrykket:

$$\frac{x^2 - x}{2x - 2} = \frac{x(\quad)}{2(\quad)} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Ved hjælp af dette simple udtryk for stolpehøjden indser vi følgende:

Når x er 0,1 mindre end 1, er stolpehøjden $\frac{x^2 - x}{2x - 2}$ _____ mindre end $\frac{1}{2}$.

Når d er et lille positivt tal gælder:

Når x er d mindre end 1, er stolpehøjden $\frac{x^2 - x}{2x - 2}$ _____ mindre end $\frac{1}{2}$.

Opgaven fortsætter på næste side!

For værdier af x mindre end 1 gælder altså at vi kan få $\frac{x^2 - x}{2x - 2}$ vilkårlig tæt på

$\frac{1}{2}$ ved at vælge x tilstrækkelig tæt på 1. Dette udtrykkes ved at sige at

$$\frac{x^2 - x}{2x - 2} \text{ går mod } \frac{1}{2} \text{ for } x \text{ gående mod } 1 \text{ fra venstre.}$$

Med symboler skrives dette

$$\frac{x^2 - x}{2x - 2} \rightarrow \frac{1}{2} \text{ for } x \rightarrow 1^-$$

hvor det er minusset efter 1 der betyder "fra venstre".

18. Betragt stadig funktionen fra opgave 17.

For værdier af x større end 1 gælder at vi kan få $\frac{x^2 - x}{2x - 2}$ vilkårlig tæt på _____ ved at vælge x tilstrækkelig tæt på 1. Dette udtrykkes ved at sige at

$$\frac{x^2 - x}{2x - 2} \text{ går mod } ______ \text{ for } x \text{ gående mod } 1 \text{ fra højre.}$$

Med symboler skrives dette

$$\frac{x^2 - x}{2x - 2} \rightarrow ______ \text{ for } x \rightarrow 1^+$$

hvor det er plusset efter 1 der betyder "fra højre".

19. Funktionen fra de to foregående opgaver går mod _____ både når x går mod 1 fra _____, og når x går mod 1 fra _____. Dette udtrykkes ved at sige at

$$______ \text{ går mod } ______ \text{ for } x \text{ gående mod } 1 .$$

Med symboler skrives dette

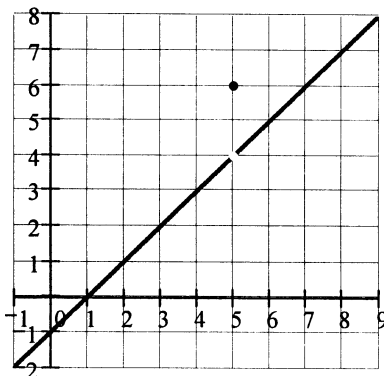
$$______ \text{ for } x \rightarrow 1 .$$

20. Udregn nogle værdier af funktionen $\left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot \sqrt{x^2}$ og gæt hvad der skal stå på de tomme pladser:

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot \sqrt{x^2} \rightarrow \underline{\hspace{2cm}} \quad \text{for } x \rightarrow 0^-$$

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot \sqrt{x^2} \rightarrow \underline{\hspace{2cm}} \quad \text{for } x \rightarrow 0^+ .$$

21. Nedenfor er vist grafen for en funktionen $f(x)$. Grafen er en ret linje bortset fra at et af dens punkter er rykket et stykke op.



Udfyld tabellen:

x :	4	4,5	4,9	5,1	5,5	6
$f(x)$:						

Når vi skal se på hvad $f(x)$ går mod når x går mod 5, skal vi ikke tage hensyn til hvad værdien af $f(x)$ er når x har værdien 5. Vi skal derimod finde det tal som $f(x)$ er tæt på når x er tæt på 5, men forskellig fra 5.

$$f(x) \rightarrow \underline{\hspace{2cm}} \quad \text{for } x \rightarrow 5 .$$

Når x har værdien 5, har $f(x)$ værdien $\underline{\hspace{2cm}}$.

Udfyld tabellen:

x :	2	2,5	2,9	3,1	3,5	4
$f(x)$:						

For at kunne udfylde de tre følgende felter skal du sammenligne med de tre linjer under foregående tabel.

Når vi skal se på hvad $f(x)$ går mod når x går mod 3, skal vi ikke tage hensyn til hvad værdien af $f(x)$ er når x har værdien $\underline{\hspace{2cm}}$. Vi skal derimod finde det tal som $f(x)$ er tæt på når x er tæt på $\underline{\hspace{2cm}}$, men forskellig fra $\underline{\hspace{2cm}}$.

Opgaven fortsætter på næste side!

$f(x) \rightarrow \underline{\hspace{2cm}}$ for $x \rightarrow 3$.

Når x har værdien 3, har $f(x)$ værdien $\underline{\hspace{2cm}}$.

Vi siger at $f(x)$ er **kontinuert** i 3 da

det tal $f(x)$ går mod for x gående mod 3
er lig
værdien af $f(x)$ når x er 3.

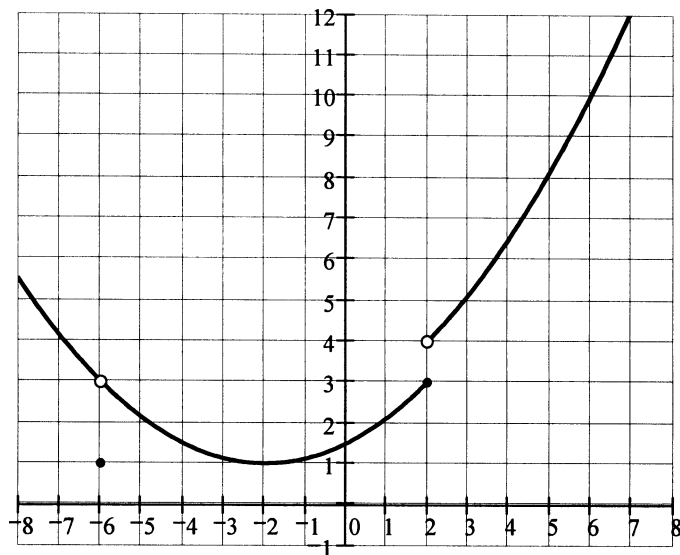
$f(x)$ er **ikke kontinuert** i 5 da

det tal $f(x)$ går mod for x gående mod 5
ikke er lig
værdien af $f(x)$ når x er 5.

Da $f(x)$ er kontinuert i 3, har grafen ikke et spring ved det punkt der har førstekoordinat 3.

Tallet "værdien af $f(x)$ når x er 5" kan skrives som et kort symboludtryk på følgende måde: $\underline{\hspace{2cm}}$. Ved at bruge dette udtryk kan betingelsen for at $f(x)$ er kontinuert i 5, skrives sådan: $f(x) \rightarrow \underline{\hspace{2cm}}$ for $x \rightarrow 5$.

22. Figuren viser grafen for en funktionen $g(x)$:



Udfyld de tomme pladser:

x :	-7	-6,5	-6,1	→		-6	←	-5,9	-5,5	-5
$g(x)$:				→			←			

Opgaven fortsætter på næste side!

Når x går mod -6 , så går $g(x)$ mod _____, og $g(-6) =$ _____, så $g(x)$ er ikke _____ i _____ da _____ \neq _____.

x :	1	1,5	1,9	→		2		←	2,1	2,5	3
$g(x)$:				→				←			

$g(x)$ er ikke kontinuert i 2 for

når x går mod 2 fra _____, så går $g(x)$ mod _____, og

$g(2) =$ _____ og

_____ \neq _____.

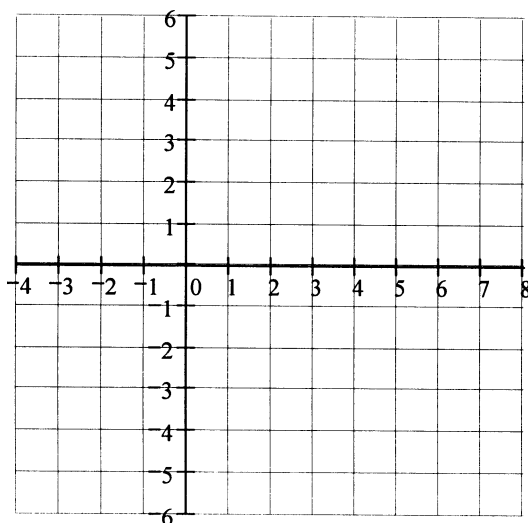
x :	5	5,5	5,9	→		6		←	6,1	6,5	7
$g(x)$:				→				←			

$g(x)$ er kontinuert i 6 da

$g(x) \rightarrow g(\underline{\quad})$ for $x \rightarrow \underline{\quad}$.

23. I koordinatsystemet nedenfor skal du tegne grafen for en funktion f som opfylder alle følgende betingelser:

- 1) $f(x)$ går mod -2 for x gående mod 3 fra højre.
- 2) $f(x)$ har værdien 0 for x lig 3.
- 3) $f(x)$ går mod 0 for x gående mod 3 fra venstre.
- 4) $f(x) \rightarrow f(5)$ for $x \rightarrow 5^+$.
- 5) f er ikke kontinuert i 5.
- 6) Der er kun to x -værdier hvori f ikke er kontinuert.



24. Et tal som en funktion går mod, kaldes en **grænseværdi**. For funktionen $g(x)$ fra opgave 22 gælder nedenstående.

Man betegner

tallet som $g(x)$ går mod for x gående mod -6

med symbolet

$$\lim_{x \rightarrow -6} g(x)$$

som læses

grænseværdien af $g(x)$ for x gående mod -6 .

Grænseværdien

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$$

eksisterer ikke.

Funktionen $g(x)$ er kontinuert i 1 da

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1).$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{2}{x} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2^x + \frac{4}{3} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

I det følgende er $f(x)$ funktionen fra opgave 21.

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \underline{\hspace{2cm}} \quad \text{og} \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$f(5) = \underline{\hspace{2cm}} \quad \text{og} \quad f(3) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

Hvis $k = \underline{\hspace{2cm}}$ så er $\lim_{x \rightarrow k} f(x) \neq f(k)$,

så f er ikke $\underline{\hspace{2cm}}$ i $\underline{\hspace{2cm}}$.