

# Opgaver i rumgeometri

1. Åbn Mathcad-dokumentet *RumFig.mcd* og gem det under et nyt navn. I dette dokument kan du få tegnet rumgeometriske figurer ved fx at angive ligninger og parameterfremstillinger. Dette skal ske mellem den grønne og den gule linje på den måde som er beskrevet i de følgende opgaver.
2. I *RumFig.mcd* kan tegnes fem punkter  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$  og  $T$  ved at angive deres koordinatsæt. Hvis man fx ville angive at  $P$  skulle have koordinatsættet  $(1, 2, 3)$ , så skulle man skrive  $P := (1 \ 2 \ 3)$ , hvor ligningens højreside er en matrix, der fås frem ved at taste Ctrl+m og vælge det ønskede antal rækker og søjler.  
Tegn punkterne  $P(3, -2, 2)$  og  $Q(1, -2, 3)$  ved at angive deres koordinatsæt.  
Prøv at dreje figuren med musen. Man får et klarere indtryk af de rumlige forhold når man ser figuren fra flere forskellige retninger.
3. Udregn koordinatsættet til et eller andet punkt  $R$  som er forskellig fra  $P$  og  $Q$ , og som ligger på linje med  $P$  og  $Q$ . Tegn dette punkt  $R$  ved at angive dets koordinatsæt. Tegn på lignende måde to andre punkter som ligger på linje med de tre første.
4. I *RumFig.mcd* kan tegnes tre linjer  $l$ ,  $m$  og  $n$  ved at angive parameterfremstillinger. Hvis man fx ville angive at  $l$  havde parameterfremstillingen 
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$
, så skulle man skrive  $l := \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ .  
Tegn linjen  $l$  gennem  $P$  og  $Q$  ved at angive en parameterfremstilling for den.  
Drej figuren og kontrollér at alle fem punkter ser ud til at ligge på linjen.
5. Gem dokumentet og luk det. Åbn igen *RumFig.mcd* og gem det under et nyt navn.
6. I *RumFig.mcd* kan tegnes tre planer, som betegnes  $\alpha$ ,  $\beta$  og  $\gamma$ . Dette er de græske bogstaver *alfa*, *beta* og *gamma* som svarer til de danske bogstaver *a*, *b* og *g*. I Mathcad kan et græsk bogstav skrives ved først at skrive det tilsvarende danske bogstav og derefter taste Ctrl+g. For at tegne en plan skal man angive en ligning eller en parameterfremstilling for den. Hvis man fx ville angive at  $\alpha$  havde ligningen  $x + 2y + 3z + 4 = 0$ , så skulle man skrive  $\alpha := (1 \ 2 \ 3 \ 4)$ .  
En plan  $\alpha$  har ligningen  $5y + 2z = 0$ . Tegn denne plan ved at angive dens ligning.
7. Tegn punktet  $P(-3, 4, 4)$  ved at angive dets koordinatsæt.
8. Lad  $l$  betegne den linje som står vinkelret på  $\alpha$  og går gennem  $P$ . Tegn linjen  $l$  ved at angive en parameterfremstilling for den.  
Husk altid at dreje figuren og kontrollere om den ser ud til at have de ønskede egenskaber.
9. Gem dokumentet og luk det. Åbn igen *RumFig.mcd* og gem det under et nyt navn.
10. Tegn punkterne  $P(0, 0, 5)$ ,  $Q(1, 0, 4)$  og  $R(0, 4, 3)$ .
11. Hvis et punkt i en plan forskydes med en vektor parallel med planen, fås et nyt punkt i planen. Udnyt dette til at tegne et eller andet punkt  $S$  som ligger i planen gennem  $P$ ,  $Q$  og  $R$ , men som ikke ligger på linje med to af disse punkter.
12. Udregn koordinatsættet til et eller andet punkt  $T$  som ligger i planen gennem  $P$ ,  $Q$  og  $R$ , men som ikke ligger på linje med to af de fire andre punkter. Tegn punktet  $T$ .

13. Hvis man fx ville angive at  $\alpha$  er planen givet ved parameterfremstillingen


$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}, \quad \text{så skulle man skrive } \alpha := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Lad  $\alpha$  betegne planen gennem  $P$ ,  $Q$  og  $R$ . Tegn planen  $\alpha$  ved at angive en parameterfremstilling for den.

14. I Mathcad kan man få udregnet et krydsprodukt ved at skrive som vist til højre, hvor  $\times$  er Ctrl+8 og  $=$  er et sædvanligt lighedstegn. Udregninger kan fx skrives ved siden af figuren.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Lad  $\beta$  betegne den plan som står vinkelret på  $\alpha$  og går gennem  $P$  og  $R$ . Tegn planen  $\beta$  ved at angive en parameterfremstilling for den.

15. Gem dokumentet og luk det. Åbn igen *RumFig.mcd* og gem det under et nyt navn.  
16. Når man i Mathcad skriver en ligning der skal løses, skal man bruge det logiske lighedstegn, som skrives ved at taste Ctrl+plus. For at få ligningen løst kan man klikke på den ubekendte og vælge Symbolics / Variable / Solve. Klik på  for at få en palet frem hvor der bl.a. kan vælges kvadratrods og numerisk værdi.

Tegn en eller anden plan  $\alpha$  som ikke er parallel med nogen af koordinataksene.

Tegn en plan  $\beta$  sådan at  $\alpha$  og  $\beta$  er parallelle og afstanden mellem dem er 4.

17. Tilføj på figuren to linjer som opfylder begge følgende betingelser:

- De skærer hinanden og står vinkelret på hinanden.
- De er parallelle med de to planer som allerede er tegnet.

18. Gem dokumentet og luk det. Åbn igen *RumFig.mcd* og gem det under et nyt navn.

19. Lad  $\alpha$  betegne  $xy$ -planen, lad  $\beta$  betegne planen med ligningen  $x - y + 9 = 0$ , og lad  $\gamma$  betegne den plan som er parallel med  $z$ -aksen og skærer de to andre akser i punkterne  $P(3, 0, 0)$  og  $Q(0, -3, 0)$ . Tegn planerne  $\alpha$ ,  $\beta$  og  $\gamma$ .

20. I *RumFig.mcd* er det variabelen *max* der angiver hvad det største tal på koordinataksene skal være. Hvis man sætter *max* lig et større tal, så vil der ikke kun tegnes en større del af koordinatsystemet, der vil også tegnes en større del af planer og linjer.

Find ud af hvad værdien af *max* er ved at taste udregningsligningen *max* = . Giv så *max* en lidt større værdi, fx 10, ved at taste en tildelingsligning *max* := .

21. I *RumFig.mcd* kan tegnes to kugler  $K$  og  $L$ . Hvis man fx ville angive at  $K$  havde centrum  $P(1, 2, 3)$  og radius 4, så skulle man skrive  $K := (1 \ 2 \ 3 \ 4)$ .

Lad  $K$  betegne en af de kugler som både har  $\alpha$ ,  $\beta$  og  $\gamma$  som tangentplan. Tegn  $K$  ved at taste eksakte tal.

22. Gør kuglen gennemsigtig ved at udføre følgende: Dobbeltklik på figuren, vælg Plot 15 (da  $K$  er delfigur nummer 15), vælg Advanced, og sæt Transparency til 30%.

23. Gem dokumentet og luk det. Åbn igen *RumFig.mcd* og gem det under et nyt navn.

24. Tegn planen  $\alpha$  med ligningen  $y + z + 3 = 0$ .

25. Lad  $K$  betegne den kugle med centrum på  $z$ -aksen som har  $\alpha$  som tangentplan. Tegn kuglen  $K$  ved at taste eksakte tal.

26. Gem dokumentet og luk det.