Krydsprodukt af vektorer i rummet

Ved <u>krydsproduktet</u> $\vec{a} \times \vec{b}$ af to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ i rummet forstås den vektor $\vec{c}$ der er fastlagt ved følgende betingelser:

– Længden af $\vec{c}$ er arealet af det (evt. udartede) parallelogram som udspændes af $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

– Hvis længden af $\vec{c}$ ikke er nul, gælder:

  $\vec{c}$ er vinkelret på både $\vec{a}$ og $\vec{b}$

  $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ danner en højreskrue.

Da arealet af parallelogrammet udspændt af to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er $|\vec{a}||\vec{b}|\sin v$ hvor v er vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$, følger at

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ .$$

Af definitionen følger umiddelbart at

$$\vec{i} \times \vec{j} = \_\_\_\_\_ , \qquad \vec{j} \times \vec{k} = \_\_\_\_\_ , \qquad \vec{k} \times \vec{i} = \_\_\_\_\_ .$$

Eksempel

Hvis længden af vektoren $\vec{a} \times \vec{b}$ er 5, gælder:

Længden af vektoren $(3\vec{a}) \times (-2\vec{b})$ er _____ .

Længden af vektoren $(3\vec{a}) \times \vec{b}$ er _____ .

Længden af vektoren $\vec{a} \times (3\vec{b})$ er _____ .

Længden af vektoren $3(\vec{a} \times \vec{b})$ er _____ .

Desuden gælder:

De to vektorer $(3\vec{a}) \times \vec{b}$ og $3(\vec{a} \times \vec{b})$ har __________ retning.

De to vektorer $-2(\vec{a} \times \vec{b})$ og $\vec{a} \times 2\vec{b}$ har __________ retning.

De to vektorer $-3(\vec{a} \times \vec{b})$ og $(-3\vec{a}) \times \vec{b}$ har __________ retning.

De to vektorer $\vec{a} \times \vec{b}$ og $\vec{b} \times \vec{a}$ har __________ retning.

Som eksemplet ovenfor antyder, er det klart at der gælder følgende formler:

$$t(\vec{a}\times\vec{b}) = \underline{\hspace{3cm}} = \underline{\hspace{3cm}}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \underline{\hspace{3cm}}\ .$$

Man må krydse ind i en parentes:

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}\ .$$

Beviset herfor springer vi over.

Udledning af koordinatudtryk for krydsprodukt

Lad

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Så kan $\vec{a}$ og $\vec{b}$ udtrykkes ved basisvektorerne $\vec{i}$, $\vec{j}$ og $\vec{k}$ på følgende måde:

$$\vec{a} = \underline{\hspace{4.5cm}} \qquad \text{og} \qquad \vec{b} = \underline{\hspace{4.5cm}}\ .$$

Ved at udnytte de omtalte regler for regning med krydsprodukt fås nu:

$$\vec{a}\times\vec{b} = (\ \underline{\hspace{4.5cm}}\ )\times(\ \underline{\hspace{4.5cm}}\ )$$

$$= \underline{\hspace{17cm}}$$

$$= (\underline{\hspace{3cm}})\vec{i} + (\underline{\hspace{3cm}})\vec{j} + (\underline{\hspace{3cm}})\vec{k}\ .$$

Ved hjælp af determinanter kan dette skrives sådan:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$