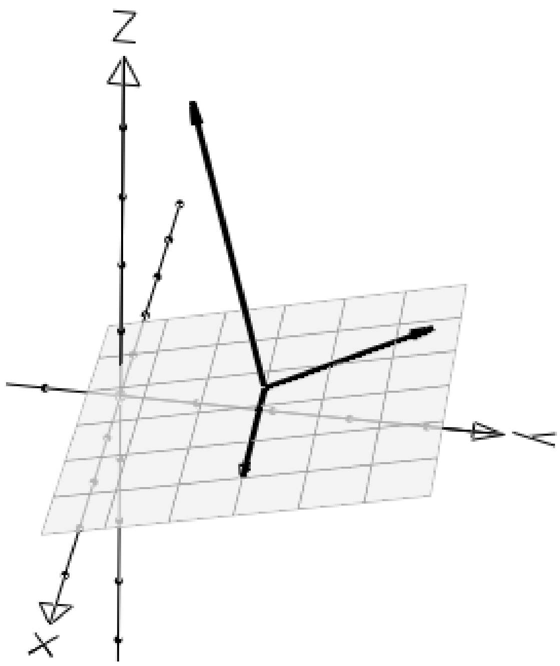
# Krydsprodukt

## En introduktion




2005 Karsten Juul

# Brugsanvisning

Du skal se i de **fuldt optrukne rammer** for at finde *definitioner* og *sætninger*.

Der er sat **punkteret ramme** om *eksempler* og *beviser*.

# Indhold

Ramme Side



Billederne på forsiden og siderne 7, 9 og 10 er fremstillet ved hjælp af Mathcad-dokumentet RumFig2 som kan downloades fra www.mat1.dk .


Krydsprodukt. En introduktion.

2. udgave 2005

## 1. Definition af krydsprodukt

Ved **krydsproduktet** $\vec{a}\times\vec{b}$ af to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ i rummet forstås den vektor der er fastlagt ved følgende betingelser:

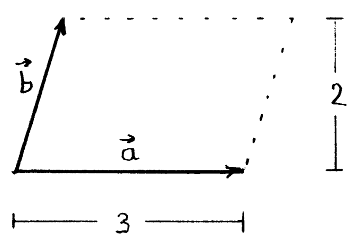
**1.1** Længden af $\vec{a}\times\vec{b}$ er arealet af det (evt. udartede) parallelogram som udspændes af $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

**1.2** Hvis længden af $\vec{a}\times\vec{b}$ ikke er nul, gælder:

- $\vec{a}\times\vec{b}$ er vinkelret på både $\vec{a}$ og $\vec{b}$
- Når man med højre hånd griber om $\vec{a}\times\vec{b}$ så fingrenes retning er omløbsretningen fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$, så peger $\vec{a}\times\vec{b}$ i tommelfingerens retning.

## 2. Eksempel på brug af definitionen af krydsprodukt

Når $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er de to vektorer på billedet, så vil vektoren $\vec{a}\times\vec{b}$ have længden 6 og pege vinkelret ud fra papiret.




## 3. Sinusformel for længde af krydsprodukt

Lad $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være to egentlige vektorer, og lad $v$ være vinklen mellem dem. Så er

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\sin v .$$

## 4. Bevis for sætningen i ramme 3

Af 1.1 fås at

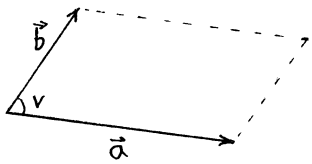
$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$$

er lig

arealet af det parallelogram der udspændes af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ .

Og dette areal er lig

$$|\vec{a}||\vec{b}|\sin v$$




da der gælder:

Når man i et parallelogram kender to ikke modstående sider og vinklen imellem dem, så kan man finde arealet ved at udregne:

den ene side *gange* den anden side
*gange* sinus til vinklen imellem dem.

## 5. Eksempel (Krydsprodukt af basisvektorer)

Som sædvanlig lader vi $\vec{i}$ , $\vec{j}$ og $\vec{k}$ betegne de tre basisvektorer.

**5.1 Påstand:**

$$\vec{i}\times\vec{i} = \vec{o} \ .$$

**Begrundelse for 5.1:**

Vektorerne $\vec{i}$ og $\vec{i}$ udspænder et (udartet) parallelogram der har arealet 0, så ifølge 1.1 har vektoren $\vec{i}\times\vec{i}$ længden 0.

**5.2 Påstand:**

$$\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}$$

**Begrundelse for 5.2:**

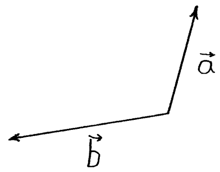
$\vec{i}\times\vec{j}$ har samme længde som $\vec{k}$ :

Da $\vec{i}$ og $\vec{j}$ udspænder et parallelogram der har arealet 1, vil vektoren $\vec{i}\times\vec{j}$ have længden 1.

$\vec{i}\times\vec{j}$ har samme retning som $\vec{k}$ :

$\vec{k}$ er vinkelret på $\vec{i}$ og $\vec{j}$ ligesom $\vec{i}\times\vec{j}$ , og når man med højre hånd griber om $\vec{k}$ så fingrenes retning er omløbsretningen fra $\vec{i}$ til $\vec{j}$ , så peger $\vec{k}$ i tommelfingerens retning ligesom $\vec{i}\times\vec{j}$ .

## 6. Oplæg til sætningen i ramme 7




Billedet viser vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ .

Ved hjælp af definitionen på krydsprodukt ses at vektoren $\vec{a}\times\vec{b}$ peger vinkelret ud fra papiret, og at vektoren $\vec{b}\times\vec{a}$ peger vinkelret ind i papiret.

Ved hjælp af definitionen ses også at $\vec{a}\times\vec{b}$ og $\vec{b}\times\vec{a}$ må have samme længde.

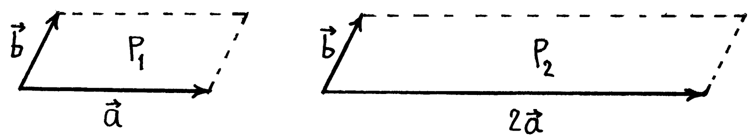
Der gælder altså følgende sætning:

## 7. Sætning

For alle vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er

$$\vec{b}\times\vec{a} = -\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) .$$

## 8. Oplæg til sætningen i ramme 9




**Billedet viser to parallelogrammer:**

$P_1$ udspændes af $\vec{a}$ og $\vec{b}$

$P_2$ udspændes af $2\vec{a}$ og $\vec{b}$ .

**Påstand 1:**

Længden af $(2\vec{a})\times\vec{b}$ er 2 gange længden af $\vec{a}\times\vec{b}$ .

**Begrundelse for påstand 1:**

Længden af $\vec{a}\times\vec{b}$ er arealet af $P_1$ . (Følger af 1.1).

Længden af $(2\vec{a})\times\vec{b}$ er arealet af $P_2$ . (Følger af 1.1).

Arealet af $P_2$ er 2 gange arealet af $P_1$ .

(Følger af at grundlinjen i $P_2$ er 2 gange grundlinjen i $P_1$ , og at de to parallelogrammer har samme højde).

**Påstand 2:**

Vektoren $(2\vec{a})\times\vec{b}$ er ensrettet med vektoren $\vec{a}\times\vec{b}$.

**Begrundelse for påstand 2:**

Vektoren $\vec{a}\times\vec{b}$ peger vinkelret ud fra papiret. (Følger af 1.2).

Vektoren $(2\vec{a})\times\vec{b}$ peger vinkelret ud fra papiret. (Følger af 1.2).

**Af påstand 1 og påstand 2 fås:**

Ganges vektoren $\vec{a}\times\vec{b}$ med $2$, så fås vektoren $(2\vec{a})\times\vec{b}$, dvs.

(1) $$2\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = (2\vec{a})\times\vec{b}.$$

**Ved at tegne andre billeder som det ovenfor** kan indses at man af (1) får en ny gyldig ligning

uanset hvilket tal der skrives på $2$'s plads, og

uanset hvilke vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ erstattes af, og

uanset om det på højre side er $\vec{a}$ eller $\vec{b}$ man ganger med tallet.

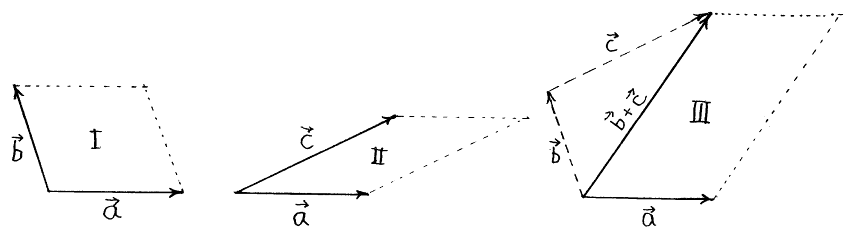
Der gælder altså følgende sætning:

## 9. Sætning

For alle vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ og alle tal $t$ gælder

$$t\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = (t\,\vec{a})\times\vec{b} \qquad \text{og} \qquad t\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = \vec{a}\times(t\,\vec{b}) .$$

## 10. Oplæg til sætningen i ramme 11




Billedet viser de tre parallelogrammer I, II og III samt nogle vektorer der udspænder dem:

I udspændes af $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

II udspændes af $\vec{a}$ og $\vec{c}$.

III udspændes af $\vec{a}$ og $\vec{b}+\vec{c}$.

Ved hjælp af definitionen af krydsprodukt ses at de tre vektorer

$$\vec{a}\times\vec{b}\,,\quad \vec{a}\times\vec{c}\quad \text{og}\quad \vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$$

alle peger vinkelret ud fra papiret. De tre vektorer er altså ensrettede.

De tre parallelogrammer har samme grundlinje, nemlig $|\vec{a}|$. Og lægges højderne i I og II sammen, fås højden i III. Altså er arealet af III summen af arealerne af I og II. Der gælder altså:

Summen af længderne af $\vec{a}\times\vec{b}$ og $\vec{a}\times\vec{c}$
er lig længden af $\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ .

Da de tre vektorer er ensrettede må derfor gælde:

(1) $$\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}\ .$$

**Ved at tegne andre billeder som det ovenfor** kan indses at man af (1) får en ny gyldig ligning

uanset hvilke vektorer $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ erstattes af, og

uanset om man ganger med $\vec{a}$ fra højre eller fra venstre.

Der gælder altså følgende sætning:

## 11. Sætning

For alle vektorer $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ gælder

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c} \qquad \text{og} \qquad \left(\vec{b}+\vec{c}\right)\times\vec{a} = \vec{b}\times\vec{a} + \vec{c}\times\vec{a}\ .$$

## 12. Hovedsætning: Koordinatsæt for krydsprodukt

For vilkårlige vektorer $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ er

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}\\[2ex] \begin{vmatrix}a_3 & b_3\\ a_1 & b_1\end{vmatrix}\\[2ex] \begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\end{pmatrix}\ .$$

## 13. Bevis for sætningen i ramme 12

Af definitionen på koordinatsæt for vektor fås at

$$\vec{a} \;=\; a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} \quad \text{og} \quad \vec{b} \;=\; b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k} \;,$$

så

$$\vec{a} \times \vec{b} \;=\; \left(a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}\right) \times \left(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}\right) .$$

Ifølge sætningen i ramme 11 er denne vektor lig summen af de tre vektorer der fås ved at krydse hhv. $a_1\vec{i}$ , $a_2\vec{j}$ og $a_3\vec{k}$ med vektoren i højre parentes. Når $a_1\vec{i}$ krydses med summen i højre parentes, fås en vektor som ifølge sætningerne i rammerne 9 og 11 kan skrives som

$$a_1b_1\,\vec{i}\times\vec{i} \;+\; a_1b_2\,\vec{i}\times\vec{j} \;+\; a_1b_3\,\vec{i}\times\vec{k} \;\;.$$

Dette kan reduceres til

$$a_1b_2\,\vec{k} \;+\; a_1b_3\,(-\vec{j})$$

da $\vec{i}\times\vec{i} = \vec{o}$ , $\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}$ og $\vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j}$ .

Ved på tilsvarende måde at krydse de to andre led fra venstre parentes med summen i højre parentes fås i alt at

$$\vec{a} \times \vec{b} \;=\; a_1b_2\vec{k} - a_1b_3\vec{j} - a_2b_1\vec{k} + a_2b_3\vec{i} + a_3b_1\vec{j} - a_3b_2\vec{i} \;\;.$$

Ved at ændre leddenes rækkefølge og sætte $\vec{i}$ , $\vec{j}$ og $\vec{k}$ uden for parentes fås

$$\vec{a} \times \vec{b} \;=\; (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k} \;\;.$$

Ifølge definitionen på koordinatsæt for vektor er de tre parenteser koordinaterne for $\vec{a} \times \vec{b}$ . Disse parenteser er lig de determinanter der er angivet i sætningen.

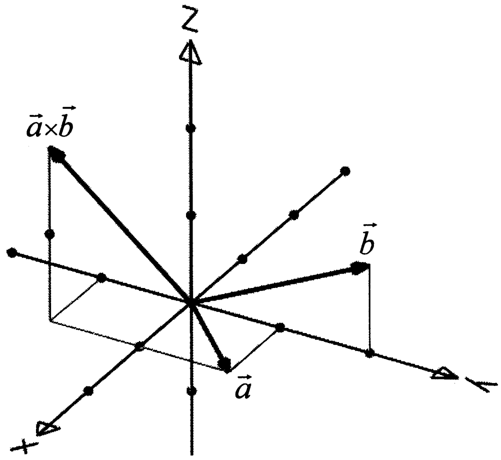
# 14. Eksempel på brug af sætningen i ramme 12

Når

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

er

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 - 0\cdot 2 \\ 0\cdot 0 - 1\cdot 1 \\ 1\cdot 2 - 1\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$



## 15. Anvendelser af krydsprodukt

**Bestemme vektor som er vinkelret på plan**

I plangeometrien får man en vektor som er vinkelret på en linje, hvis man tager tværvektoren til en vektor som er parallel med linjen.

I rumgeometri kan man ikke tale om tværvektor til en vektor. I stedet kan bruges krydsprodukt:

> Man får en vektor som er vinkelret på en plan, hvis man udregner krydsproduktet af to ikke-parallelle vektorer som er parallelle med planen.

**Undersøge om to vektorer er parallelle**

I plangeometrien kan man undersøge om to egentlige vektorer er parallelle ved at undersøge om deres determinant er nul.

I rumgeometri kan man ikke tale om determinant af to vektorer. I stedet kan bruges krydsprodukt:

> Man kan undersøge om to egentlige vektorer er parallelle ved at undersøge om deres krydsprodukt er nulvektor.

**Bestemme areal af parallelogram**

I plangeometrien kan man bestemme arealet af et parallelogram udspændt af to vektorer ved at beregne den numeriske værdi af vektorernes determinant.

I rumgeometri kan man ikke tale om determinant af to vektorer. I stedet kan bruges krydsprodukt:

> Man kan bestemme arealet af et parallelogram udspændt af to vektorer ved at beregne længden af vektorernes krydsprodukt.

## 16. Eksempel på anvendelse af krydsprodukt

Der er givet punkterne $A(4,-4,0)$ , $B(1,2,3)$ og $C(-3,10,7)$ .

**Vi undersøger om punkterne $A$, $B$ og $C$ ligger på linje.**

Det gør de netop hvis de egentlige vektorer $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ er parallelle; og det er de netop hvis deres krydsprodukt er $\vec{o}$ .

Ved udregning fås $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,

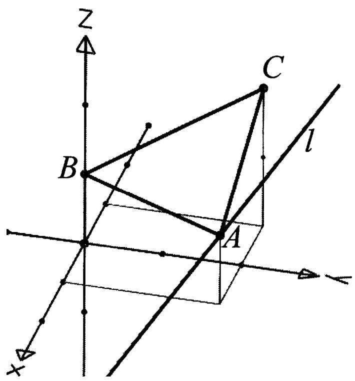
dvs. $\underline{\underline{A, B \text{ og } C \text{ ligger på linje}}}$ .

## 17. Eksempler på anvendelse af krydsprodukt

En plan $\alpha$ går gennem de tre punkter

$$A(1,2,1)\ ,\quad B(0,0,1)\quad \text{og}\quad C(-1,2,2)\ .$$

En linje $l$ i $\alpha$ går gennem $A$ og står vinkelret på linjestykket $AB$.




**Vi beregner koordinatsættet for en retningsvektor for *l*.**

Først bestemmes en vektor som er vinkelret på $\alpha$ :

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\ .$$

Da $l$ både er vinkelret på $\vec{n}$ og $\overrightarrow{AB}$, må $l$ være parallel med følgende vektor:

$$\vec{n}\times\overrightarrow{AB} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}-8\\4\\5\end{pmatrix}}}\ .$$

**Arealet af trekant *ABC* er**

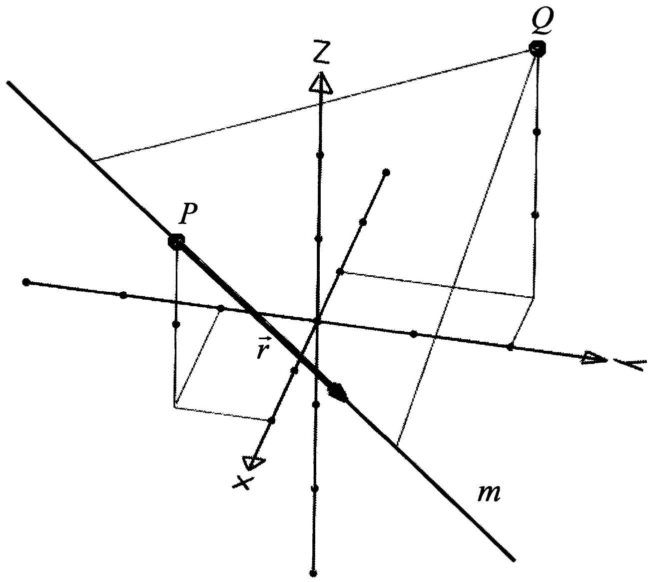
$$\frac{1}{2}\cdot|\vec{n}| = \underline{\underline{\frac{\sqrt{21}}{2}}} \approx 2{,}29\ .$$

# 18. Eksempel på anvendelse af krydsprodukt

En linje *m* går gennem punktet $P(2,-1,2)$ og er parallel med vektoren

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

En plan $\alpha$ indeholder linjen *m* og punktet $Q(-1,2,3)$.




**Vi bestemmer en normalvektor til planen $\alpha$ .**

Da vektorerne $\vec{r}$ og $\overrightarrow{PQ}$ er parallelle med $\alpha$ , vil deres krydsprodukt være vinkelret på $\alpha$ hvis det ikke er nulvektor. Ved udregning fås:

$$\vec{r} \times \overrightarrow{PQ} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}}} .$$