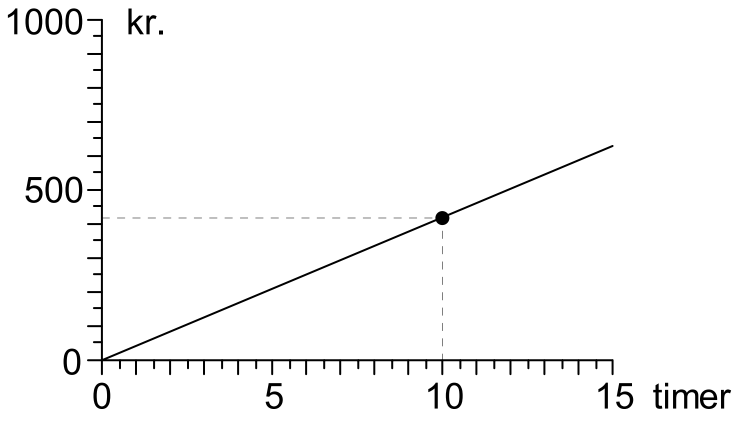
Indledning til

Symbolsprog og Variabelsammenhænge

for Gymnasiet og Hf



2005 Karsten Juul

Brugsanvisning

Du skal se i de **fuldt optrukne rammer** for at finde: Regler for løsning af opgaver og tilhørende eksempler.

Der er sat **punkteret ramme** om oplæg og opgaver.

Hæftet er selvinstruerende og kan gennemarbejdes i grupper.

Indhold

Indledning til Symbolsprog og Variabelsammenhænge for Gymnasiet og Hf

1.01 udgave 2005

Rækkefølge af udregninger

1. Oplæg (Rækkefølge af udregninger)

I et internetspil står:

"Dit gevinsttal er tallet $25 - b \cdot 3$ hvor b er antallet af blå kugler."

Hvis antallet af blå kugler er 5, er din gevinst så

$25 - 5 \cdot 3 = 20 \cdot 3 = 60$ eller $25 - 5 \cdot 3 = 25 - 15 = 10$?

Læs reglerne i ramme 2 for at se hvilken af metoderne der er den rigtige.

2. Nogle regler for rækkefølge af udregninger

2.1 Vedtægt: Det der står i parentes, skal regnes ud først.
Eksempel: $(8-3) \cdot 2 = 5 \cdot 2 = 10$.

2.2 Vedtægt: Gange skal regnes ud før plus og minus.
Eksempel: $8 - 3 \cdot 2 = 8 - 6 = 2$. Der er *underforstået en parentes* om $3 \cdot 2$.

2.3 Vedtægt: Plus og minus udregnes fra venstre mod højre
Eksempler: $8 - 3 + 2 = 5 + 2 = 7$ og $8 - 3 - 2 = 5 - 2 = 3$. I begge tilfælde er *underforstået en parentes* om $8 - 3$.

3. Opgave (Rækkefølge af udregninger. Fortsættelse af Oplæg 1)

I denne opgave skal du bruge reglerne fra ramme 2 .

Nedenfor står fire regler a, b, c og d for at udregne gevinsttal. Skriv hver af disse regler som et regneudtryk hvor antallet af blå kugler kaldes b og antallet af hvide kugler kaldes h .

a) Gevinsttal: Det tal der fås ved fra 15 at trække antallet af blå kugler og derefter gange resultatet med 2,5 .

b) Gevinsttal: Det tal der fås ved fra 30 at trække det tal der fås ved fra antallet blå kugler at trække antallet af hvide kugler.

c) Gevinsttal: Det tal der fås ved at gange antallet af hvide kugler med 4 og derefter lægge 10 til resultatet.

d) Gevinsttal: Det tal der fås ved til 80 at lægge det tal der fås ved at gange antallet af blå kugler med det tal der fås ved til 7 at lægge det dobbelte af antallet af hvide kugler.

I ramme 1 blev gevinsttallet udregnet ved hjælp af reglen:

e. Gevinsttal: $25 - b \cdot 3$.

Skriv denne regel uden at bruge symboler.

4. Opgave (Rækkefølge af udregninger. Fortsættelse af Opgave 3)

Søren har fundet ud af at man kan finde antallet af røde kugler ved at udregne $b+h$ og trække resultatet fra 75. På internettet skriver han at antallet af røde kugler er $75-b+h$.

Skriv en e-mail til Søren som gør opmærksom på at det er forkert, og fortæller om den relevante regel.

Modsat tal

5. Oplæg (Fortegn for modsat tal)

Kun én af følgende fire påstande er rigtig:

a) Når der står $-t$, er t negativ.
b) Tallet $-t$ er altid negativt.
c) Tallet $-t$ kan være positivt.
d) Tallet $-t$ er enten nul eller et negativt tal.

Læs reglerne i ramme 6 for at se hvad der er rigtigt.

6. Modsat tal

6.1 Definition: Når man skifter fortegn for et tal, så får man dets *modsatte tal*.

Eksempler: Det modsatte tal til 3 er -3 . Det modsatte tal til -3 er 3 .

6.2 Vedtægt: Det matematiske symbol for "skift fortegn" er et minustegn der skrives foran tallet.

Eksempel: At "det modsatte tal til -3 er 3" kan skrives sådan: $-(-3) = 3$.

6.3 Sætning: Ligningen $-(-t)=t$ bliver sand uanset hvilket tal der indsættes for t .
(Dvs. når man skifter fortegn for et tal, og derefter skifter fortegn for resultatet, så ender man med det oprindelige tal).

6.4 Sætning: Udtrykket $-t$ bliver et negativt tal, hvis der indsættes et positivt tal for t .
(Dvs. når man skifter fortegn for et positivt tal, så får man et negativt tal).

6.5 Sætning: Udtrykket $-t$ **bliver et positivt tal**, hvis der indsættes et negativt tal for t .
(Dvs. når man skifter fortegn for et negativt tal, så får man et positivt tal).

6.6 Vedtægt (Om rækkefølge af udregninger)**:** Fortegnsskift (dannelse af modsat tal) skal udføres før "trække fra" og "lægge til", og efter "gange".

Eksempler

I udtrykket $-x-4$ er der *underforstået en parentes* om $-x$.

I udtrykket $-2 \cdot x$ er der *underforstået en parentes* om $2 \cdot x$.

For at skrive "det modstte tal til $x-4$ " med symboler, må bruges parentes: $-(x-4)$.

6.7 Vedtægt: Man skriver ikke to regnetegn lige efter hinanden.
(At skrive to regnetegn lige efter hinanden er noget uantageligt jask som fører til misforståelser og tvivl om hvad der skulle stå).

Eksempler

Skriv ikke $2 \cdot -5+1$, skriv i stedet $2 \cdot (-5)+1$.

Skriv ikke $3--6$, skriv i stedet $3-(-6)$.

7. Opgave (Modsat tal)

I denne opgave skal du bruge noget af det der står i ramme 6.

I et koordinatsystem er afsat nogle punkter. For ethvert af de afsatte punkter gælder at dets *y*-koordinat er det modsatte tal til dets *x*-koordinat.

a) Hvad er *y*-koordinaten til det af de afsatte punkter som har *x*-koordinaten $-1{,}5$?

b) Hvad er *y*-koordinaten til det af de afsatte punkter som har *x*-koordinaten $8{,}3$?

c) Hvad er *x*-koordinaten til det af de afsatte punkter som har *y*-koordinaten 4 ?

d) Hvad er *y*-koordinaten til det af de afsatte punkter som har *x*-koordinaten $1+k$?

8. Oplæg (Modsat tal)

På en skærm står et rødt tal. Når det ændres, udregner eleverne Mette og Søren på hver deres måde et tal ud fra det nye røde tal. Deres udregninger svarer til følgende regnekommandoer:

Mette: 1) Læg 10 til det røde tal, 2) Dan det modsatte tal til resultatet.

Søren: 1) Dan det modsatte tal til det røde tal, 2) Læg 10 til resultatet.

a) Hvilke tal kommer de frem til hvis det røde tal er 4 ?

b) Hvilke tal kommer de frem til hvis det røde tal er -4 ?

c) Hvilke tal kommer de frem til hvis det røde tal er x ?

9. Opgave (Repetition)

a) Opskriv $3 \cdot x - 12$ med tallet $-0{,}7$ indsat for x .

b) Opskriv $3 \cdot x - 12$ med tallet $d + 2$ indsat for x .

c) Opskriv $-9 - x$ med tallet -1 indsat for x .

d) Opskriv $-9 - x$ med tallet $d + 2$ indsat for x .

e) Forestil dig at du på dit job er tvunget til at bruge et gammelt computerprogram hvor du er nødt til at skrive alle underforståede parenteser. Hvordan skulle du så skrive nedenstående udtryk?

1) $x - 2 + k$ 2) $x - 2 \cdot k$ 3) $-x - y - 1$ 4) $1 + y \cdot (17 - x)$.

10. Opgave (Repetition)

I et spil kan et gevinsttal udregnes ved at trække antallet af sorte robotter fra antallet af hvide robotter og gange resultatet med 6.

a) Hvis der er 22 hvide robotter og 20 sorte robotter, hvad er så gevinsttallet?

b) Hvis der er m hvide robotter og n sorte robotter, hvad er så gevinsttallet?

c) Skriv og udregn det udtryk der fås ved at indsætte 22 for m og 20 for n i det udtryk du skrev som svar på foregående spørgsmål.

11. Oplæg (Sammenhæng mellem "modsat tal" og "trække fra")

På en skærm står et rødt og et blåt tal. Når de ændres, udregner eleverne Mette, Peter og Søren på hver deres måde et tal ud fra det nye røde og det nye blå tal. Deres udregninger svarer til følgende regnekommandoer:

Mette: 1) Dan det modsatte tal til det blå tal, 2) Læg resultatet til det røde tal.

Peter: 1) Dan det modsatte tal til det røde tal, 2) Læg resultatet til det blå tal.

Søren: 1) Træk det blå tal fra det røde.

a) Hvilke tal kommer de frem til hvis det røde tal er 6 og det blå tal er 2 ?

b) Hvilke tal kommer de frem til hvis det røde tal er 17 og det blå tal er 16 ?

c) Hvilke tal kommer de frem til hvis det røde tal er x og det blå tal er y ?

12. Sammenhæng mellem "modsat tal" og "trække fra"

12.1 Sætning: $b - a = b + (-a)$, uanset hvilke tal der indsættes for a og b .

Eksempel: $100 - 2{\cdot}t = 100 + (-2{\cdot}t)$. Denne ligning fås af formel 12.1 ved at indsætte $2{\cdot}t$ for a og 100 for b .

13. Opgave (Sammenhæng mellem "modsat tal" og "trække fra")

a) Hvilke af følgende tre tal er lig hinanden uanset hvilke tal der indsættes for x og y?

1) $12 + y - x$ 2) $12 + y - (-x)$ 3) $12 + y + (-x)$.

b) Hvad skal indsættes for a og b i formel 12.1 for at begrunde at der gælder $x - 1 + (-y) \;=\; x - 1 - y$?

c) Begrund at $3 \cdot t - 7 + x \;=\; 3 \cdot t + (-7) + x$.

14. Opgave (Repetition)

Hver gang der fremkommer et nyt grønt tal på en skærm, så udregner eleverne Mette, Peter og Søren på hver sin måde et tal ud fra det nye grønne tal.

Mettes udregning svarer til følgende række af regnekommandoer:

1) Læg 2 til det grønne tal
2) Læg det grønne tal til resultatet.

Mette udfører altså den følge af udregninger der er angivet i udtrykket

$$x + 2 + x$$

hvor x er det grønne tal.

a) Peter udfører den følge af udregninger der svarer til udtrykket

$$2 \cdot (x + 1) \;.$$

Skriv den tilsvarende række af regnekommandoer. (Ovenfor er skrevet rækken af regnekommandoer svarende til Mettes udtryk).

b) Søren udfører den følge af udregninger der svarer til udtrykket

$$2 \cdot x + 1 \;.$$

Skriv den tilsvarende række af regnekommandoer.

c) To af de tre elever får hver gang samme tal som resultat. Der gælder altså en regel. Skriv denne regel med en formulering af samme type som den der er anvendt i sætning 12.1. (Der vil ikke være fornuft i at lære reglen udenad).

Flerleddet størrelse

15. Led

15.1 Definition

Et udtryk på formen $a+b$ er en *flerleddet størrelse med 2 led*,
et udtryk på formen $a+b+c$ er en *flerleddet størrelse med 3 led*,
osv.

$a-b+c$ som er lig $a+(-b)+c$,
er en *flerleddet størrelse med de 3 led* a, $-b$ og c.

Eksempler

$6+2\cdot 4-3+5$ har 4 led
da det fås af $a+b+c+d$ ved at sætte $a=6$, $b=2\cdot 4$, $c=-3$ og $d=5$.

$2\cdot(1-3)+7$ har 2 led
da det fås af $a+b$ ved at sætte $a=2\cdot(1-3)$ og $b=7$.

16. Opgave (Antal led)

Angiv antallet af led:

a) $5-8\cdot x+y-1$ b) $1-4\cdot(9-x)+x$ c) $-y+2\cdot x$.

17. Oplæg (Flerleddet størrelse)

På en skærm fremkommer et rødt tal, et blåt tal og et grønt tal. Mette og Peter foretager udregninger der svarer til følgende regnekommandoer:

Mette: 1) Træk det blå tal fra det røde, 2) Læg det grønne tal til resultatet.
Peter: 1) Læg det grønne tal til det røde, 2) Træk det blå tal fra resultatet.

a) Hvilke tal får de, hvis det røde tal er 6, det blå tal er 2, og det grønne tal er 3 ?
b) Hvilke tal får de, hvis det røde tal er 10, det blå tal er 6, og det grønne tal er 4 ?
c) Hvilke udtryk får de, hvis de kalder det røde tal a, det blå tal b, og det grønne tal c ?

18. Oplæg (Flerleddet størrelse)

Nedenfor er vist 3 brikker. Man kan danne 6 forskellige udtryk ved at lægge brikkerne i forskellige rækkefølger. Er alle 6 udtryk lig hinanden uanset hvilket tal der indsættes for x ?

$$\boxed{+5}\ \boxed{-3\cdot x}\ \boxed{+x}$$

19. Flerleddet størrelse

19.1 Sætning

Man kan tænke på en flerleddet størrelse som en samling af led.
Dvs. man behøver ikke tænke på en bestemt rækkefølge at lægge leddene sammen i.
Alle rækkefølger giver samme resultat.

Eksempler

$$a+b+c+d \;=\; (c+d)+(a+b)$$
$$8-2\cdot x+5 \;=\; 8+5-2\cdot x$$
$$8-2\cdot x+5 \;=\; -2\cdot x+5+8$$
$$8-2\cdot x+5 \;=\; 8+(5-2\cdot x)$$

20. Oplæg (Skifte fortegn for flerleddet størrelse)

På en skærm fremkommer et rødt tal og et blåt tal. Mette og Peter foretager udregninger der svarer til følgende regnekommandoer:

Mette: 1) Skift fortegn for det røde tal, 2) Skift fortegn for det blå tal, 3) Læg resultatet fra 2) til resultatet fra 1).

Peter: 1) Læg det blå tal til det røde, 2) Skift fortegn for resultatet fra 1).

a) Hvilke tal får de, hvis det røde tal er 6, og det blå tal er 2 ?

b) Hvilke tal får de, hvis det røde tal er 8, og det blå tal er -3 ?

c) Hvilke udtryk får de, hvis de kalder det røde tal a og det blå tal b ?

21. Oplæg (Skifte fortegn for udtryk med flere led)

a) Det oplyses at x er 3 og y er 2. For hver af de 6 udtryk skal du finde ud af hvilken af de 6 figurer der er en illustration af udtrykket.

(1) x (2) y (3) $x+y$ (4) $-(x+y)$ (5) $-x+y$ (6) $-x-y$.

(a) $\underline{\underline{\uparrow\uparrow\uparrow}}$ (b) $\underline{\underline{\uparrow\uparrow}}$ (c) $\underline{\underline{\uparrow\uparrow\uparrow\ \uparrow\uparrow}}$ (d) $\overline{\overline{\downarrow\downarrow\downarrow}}\ \underline{\underline{\uparrow\uparrow}}$

(e) $\overline{\overline{\downarrow\downarrow\downarrow}}\ \overline{\overline{\downarrow\downarrow}}$ (f) $\overline{\overline{\downarrow\downarrow\downarrow\ \downarrow\downarrow}}$

b) Hvilke af de 6 udtryk er lig hinanden?

22. Skifte fortegn for flerleddet størrelse

22.1 Sætning: Man kan skifte fortegn for et udtryk ved at skifte fortegn for hvert led. Fx vil

$$-(a+b-c) \;=\; -a-b+c\ .$$

Det ses at $-(\ \ )$ er fjernet, og at de tre led a, b og $-c$ i parentesen er erstattet af deres modsatte tal $-a$, $-b$ og c.

Eksempler: $-(5-2{\cdot}x) \;=\; -5+2{\cdot}x$ og $-(-h+k-3) \;=\; h-k+3$ **.**

23. Hæve og sætte parenteser

23.1 Sætning: Man kan hæve eller sætte en plus-parentes uden videre.
(Det er en *plus-parentes* hvis der foran står $+$ eller ingenting, og efter står $+$, $-$ eller ingenting).

Begrundelse: Når vi fx omskriver sådan $a+(b-c) \;=\; a+b-c$, så ændrer vi ikke på at det er de tre led a, b og $-c$ der skal lægges sammen. Vi ændrer kun den rækkefølge leddene lægges sammen i.

Eksempler

$2+(-x+3)=2-x+3$.

$(x-2)+(-3{\cdot}x-5)+(x+1)\cdot 2 \;=\; x-2-3{\cdot}x+5+(x+1)\cdot 2$.

Bemærk at $(x-2)$ er en plus-parentes, og at $(x+1)$ ikke er en plusparentes.

23.2 Sætning: Når man hæver en minus-parentes, skal man skifte fortegn for leddene i parentesen.
(Det er en *minus-parentes* hvis der foran står $-$, og efter står $+$, $-$ eller ingenting).

Begrundelse: Lad os fx se på udtrykket $a-(b-c)$. Her skal a og $-(b-c)$ lægges sammen, og ifølge 22.1 er $-(b-c)$ lig $-b+c$, så $a-(b-c) \;=\; a-b+c$.

Eksempler

$2-(-x+1) \;=\; 2+x-1$.

$x-(8+x) \;=x-8-x$.

I sidste ligning er -8 fremkommet ved at skifte fortegn for 8. Minusset i -8 er altså ikke det minus der står foran parentesen. Når man hæver en minusparentes, så fjerner man både parentesen og minusset foran den.

24. Opgave (Hæve parenteser)

Hæv parenteserne i følgende udtryk:

a) $-(2-x)+(3{\cdot}y-k)$ b) $14{\cdot}k-(-9+t)$ c) $(-m-1)-(-2{\cdot}n-k+h)$.

Produkt

25. Faktorer

25.1 Definition

Et udtryk på formen $a \cdot b$ er et *produkt med 2 faktorer*,
et udtryk på formen $a \cdot b \cdot c$ er et *produkt med 3 faktorer*,
osv.

Eksempler

$2 \cdot (1-3)$ er et produkt med 2 faktorer
da det kan fås af $a \cdot b$ ved at sætte $a = 2$ og $b = 1-3$.

$2 \cdot 5 \cdot (4 + 2 \cdot 3)$ er et produkt med 3 faktorer
da det kan fås af $a \cdot b \cdot c$ ved at sætte $a = 2$, $b = 5$ og $c = 4 + 2 \cdot 3$.

26. Opgave (Antal faktorer.)

Angiv antallet af faktorer:

a) $3 \cdot (2 \cdot x + 7)$ b) $8 \cdot x \cdot 5 \cdot y$ c) $3 \cdot x \cdot (6 - 2 \cdot x)$.

27. Produkt

27.1 Sætning
Man kan tænke på et produkt som en samling af faktorer.
Dvs. man behøver ikke tænke på en bestemt rækkefølge at gange dem sammen i.
Alle rækkefølger giver samme resultat.

Eksempler

$a \cdot b \cdot c \cdot d \;=\; b \cdot (d \cdot (a \cdot c))$

$25 \cdot 17 \cdot 4 \;=\; 25 \cdot 4 \cdot 17$

$(5 - x) \cdot 8 \;=\; 8 \cdot (5 - x)$

27.2 Sætning: I et produkt, kan man uden videre sætte parentes om nogle af faktorerne.

Begrundelse: At sætte sådan en parentes ændrer ikke ved hvad det er for tal der skal ganges. Det ændrer kun den rækkefølge hvori de ganges.

Eksempler

$a \cdot b \cdot c \;=\; a \cdot (b \cdot c)$

$2 \cdot (3 \cdot x) \;=\; 2 \cdot 3 \cdot x$

27.3 Sætning: $-a = (-1)\cdot a$, dvs. man kan skifte fortegn for et udtryk ved at gange det med -1 .

27.4 Sætning: Man kan skifte fortegn for et produkt ved at skifte fortegn for én af faktorerne, og produktets værdi ændres ikke når man skifter fortegn et lige antal gange.

Eksempler

$a\cdot b\cdot(-c)\cdot d = -a\cdot b\cdot c\cdot d$

$3\cdot(-x) = -3\cdot x$

$(-4)\cdot 2\cdot(-3)\cdot(-x) = 4\cdot 2\cdot 3\cdot(-x)$

$-3\cdot(-x) = 3\cdot x$

$-(-3)\cdot x = 3\cdot x$

$(-k)\cdot 2-4\cdot(-x) = -2\cdot k+4\cdot x$

Bemærk at $(-k)\cdot 2-4\cdot(-x)$ ikke er et produkt. Udtrykket er en toleddet størrelse hvor hvert af de to led er et produkt der kan omskrives ved at benytte 27.4 .

27.5 Sætning: $0\cdot x = 0$ og $1\cdot x = x$ for ethvert tal x .

28. Opgave (Produkt)

Begrund gyldigheden af hvert af de nummererede lighedstegn ved at angive nummeret på en af reglerne i ramme 27.

a) $5\cdot(x\cdot 4) \overset{(1)}{=} 5\cdot x\cdot 4 \overset{(2)}{=} 5\cdot 4\cdot x = 20\cdot x$

b) $2\cdot(-x)\cdot 6 \overset{(3)}{=} -2\cdot x\cdot 6 \overset{(4)}{=} -2\cdot 6\cdot x = -12\cdot x$

c) $4-3\cdot(-x) \overset{(5)}{=} 4+3\cdot x$.

Reducér:

d) $(3-2)\cdot x+(3-3)\cdot y$

e) $-2\cdot(-x)\cdot 3-3$

f) $(-a)\cdot b\cdot(-1)-(-a)\cdot(-3)$

g) $3\cdot(-x)+2\cdot(-y)-4\cdot(-k)$

29. Opgave (Produkt)

a) Brug 27.3 og 6.3 til at bevise at $(-1)\cdot(-1) = 1$.

b) Bevis at $(-a)\cdot(-b) = a\cdot b$ ved at bruge 27.3 , 27.1 , $(-1)\cdot(-1) = 1$ og 27.5 .

Gange ind i parentes

30. Oplæg

a) Det oplyses at x er 4 og y er 3. For hvert af de 8 udtryk skal du finde ud af hvilken af de 8 figurer der er en illustration af udtrykket. Figurerne skal opfattes som billeder af brikker der ligger på et bord.

(1) x (2) y (3) $2 \cdot x$ (4) $2 \cdot y$ (5) $x+y$ (6) $2 \cdot x+y$ (7) $2 \cdot x+2 \cdot y$

(8) $2 \cdot (x+y)$.

(a) $\boxed{\text{OOOO}}$ (b) $\boxed{\text{OOO}}$ (c) $\boxed{\text{OOOO OOO}}$ (d) $\begin{array}{c}\boxed{\text{OOOO OOO}}\\ \boxed{\text{OOOO OOO}}\end{array}$ (e) $\boxed{\begin{array}{c}\text{OOOO}\\ \text{OOOO}\end{array}}$ (f) $\boxed{\begin{array}{c}\text{OOO}\\ \text{OOO}\end{array}}$

(g) $\boxed{\begin{array}{c}\text{OOOO}\\ \text{OOOO}\end{array}}$ $\boxed{\begin{array}{c}\text{OOO}\\ \text{OOO}\end{array}}$ (h) $\boxed{\begin{array}{c}\text{OOOO}\\ \text{OOOO}\end{array}}$ $\boxed{\text{OOO}}$

b) Hvilke af de 8 udtryk er lig hinanden?

Hvilke af følgende ligninger bliver sande uanset hvilket tal der indsættes for z ?

c) $3 \cdot (z+4) \;=\; 3 \cdot z+4$ d) $4 \cdot (2+z) \;=\; 8+4 \cdot z$

e) $2 \cdot (3 \cdot z) \;=\; 6 \cdot 2 \cdot z$ f) $5 \cdot (z \cdot 2) \;=\; z \cdot 10$.

31. Gange ind i parentes. Sætte uden for parentes.

31.1 Sætning: Man kan gange en flerleddet størrelse med et tal ved at gange hvert led med tallet. Fx vil

$$a \cdot (b+c-d) \;=\; a \cdot b+a \cdot c-a \cdot d \;.$$

Afhængigt af om $a \cdot (b+c-d)$ omskrives til $a \cdot b+a \cdot c-a \cdot d$ eller omvendt, taler man om at **gange *a* ind i parentesen** eller at **sætte *a* uden for en parentes**.

Eksempler

$3 \cdot (5-x) \;=\; 15-3 \cdot x$

$(k+2) \cdot x \;=\; k \cdot x+2 \cdot x$

$-2 \cdot (3 \cdot x-7) \;=\; -(6 \cdot x-14) \;=\; -6 \cdot x+14$, da $2 \cdot (3 \cdot x) \;=\; (2 \cdot 3) \cdot x$ ifølge 27.1 .

$-2 \cdot (3 \cdot x-7) \;=\; (-2) \cdot (3 \cdot x-7) \;=\; -6 \cdot x+14$

$4 \cdot x+4 \cdot y \;=\; 4 \cdot (x+y)$

$2-4 \cdot x \;=\; 2 \cdot (1-2 \cdot x)$

32. Opgave (Gange ind i parentes. Sætte uden for parentes.)

Gang ind i parentes:

a) $(6+y)\cdot 2$ b) $h\cdot(4-x)$ c) $-8\cdot(2+x)$.

Sæt uden for parentes:

d) $7{\cdot}h-7{\cdot}k$ e) $12+4{\cdot}x$ f) $5{\cdot}x-5$.

33. Underforstået gangetegn

Ofte skriver man $3x$ i stedet for $3{\cdot}x$, $4(x+2)$ i stedet for $4\cdot(x+2)$, osv.

34. At reducere

Man siger at man har *reduceret* et udtryk, når man har fundet et simplere udtryk der er lig det oprindelige.

34.1 Regel: Når man vil reducere et udtryk som $4x+x+2x$, så kan man tænke: Der er fire x plus ét x plus to x , dvs. i alt syv x , så $4x+x+2x \;=\; 7x$.

Begrundelse: $4x+x+2x \;=\; (4+1+2)x \;=\; 7x$, ifølge 31.1 .

Eksempler

$3x-4+x+1 \;=\; 4x-3$

$x-2(x+3) \;=\; x-(2x+6) \;=\; x-2x-6 \;=\; -x-6$

35. Opgave (At reducere)

Reducér:

a) $10-x-8x-1$ b) $4(3-2x)+8x$ c) $-4(3k+2)+10k-(k-2)$

d) $-(9+4a)-(8a-10)+(a-2)$ e) $3(2x-4)-2(4x-3)-1$

f) $-8-5(x-3+k)-(7-5k)$ g) $-(x-1)+8(1-x)+9x$.

Brøk, division

36. Brøk, division

36.1 Definition: Tallet $\frac{m}{n}$ er en n'tedel af m, dvs. $\frac{m}{n} = m : n$, for alle tal m og n hvor n ikke er 0.

37. Produkter og brøker

37.1 Sætning: $\frac{m}{n} = m \cdot \frac{1}{n}$, for alle tal m og n hvor n ikke er 0.

37.2 Sætning: Det er ligegyldigt for resultatet om en faktor står over brøkstregen eller ved siden af brøken: $k \cdot \frac{m}{n} = \frac{k \cdot m}{n}$, for alle tal k, m og n hvor n ikke er 0.

Eksempel

$$3 \cdot x \cdot \frac{1}{4} = 3 \cdot \frac{x}{4} = \frac{3 \cdot x}{4} = \frac{3}{4} \cdot x \ .$$

37.3 Sætning: Man kan skifte fortegn for en brøk ved at skifte fortegn for tæller eller nævner.

Eksempler

$$-\frac{3}{4} = \frac{-3}{4} = \frac{3}{-4} \qquad \text{og} \qquad \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4} = -\frac{-3}{4} = -\frac{3}{-4} \ .$$

37.4 Sætning: $n \cdot \frac{1}{n} = 1$, $\frac{n}{n} = 1$, $n \cdot \frac{m}{n} = m$ og $\frac{n \cdot m}{n} = m$ for alle tal m og n hvor n ikke er 0.

Eksempler

$$\frac{3}{4} \cdot 4 = 3 \qquad \text{og} \qquad \frac{8x}{8} = x \ .$$

Ganges $\frac{1}{5}x$ med 5, fås x.

38. Opgave (Produkter og brøker)

a) Hvilke af følgende udtryk er lig hinanden uanset hvilket tal der indsættes for x?

$$1)\ \frac{1}{2}\cdot 5\cdot x \qquad 2)\ \frac{x\cdot 5}{2} \qquad 3)\ x\cdot 2\cdot\frac{1}{5} \qquad 4)\ x\cdot\frac{5}{2} \qquad 5)\ \frac{2\cdot x}{5}\ .$$

b) Hvilke af følgende udtryk er lig hinanden uanset hvilket tal der indsættes for x?

$$1)\ \frac{x\cdot 6}{6} \qquad 2)\ \frac{x}{6} \qquad 3)\ x \qquad 4)\ 6 \qquad 5)\ \frac{x}{6}\cdot 6 \qquad 6)\ 1\ .$$

c) Hvilke af følgende udtryk er lig hinanden uanset hvilket tal der indsættes for x?

$$1)\ -\frac{x}{2} \qquad 2)\ \frac{-x}{-2} \qquad 3)\ \frac{-x}{2} \qquad 4)\ \frac{x}{2} \qquad 5)\ -\frac{x}{-2}\ .$$

d) Reducér:

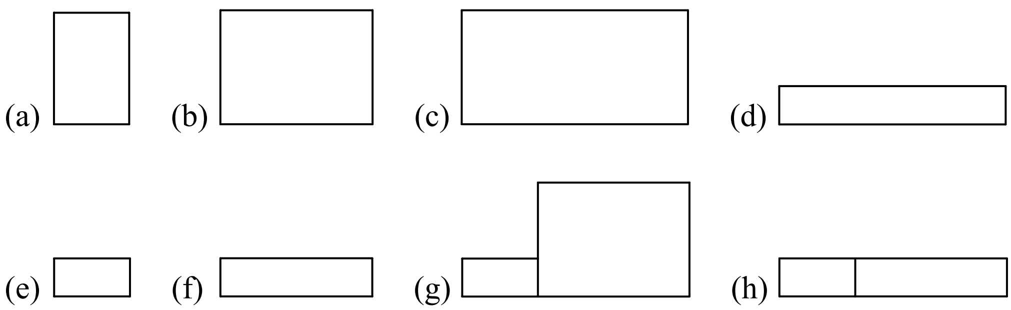
$$1)\ -\frac{-1}{h}\cdot h\ +\ h\cdot\frac{-1}{-h}\ +\ \frac{2}{h}\cdot h \qquad 2)\ 6\cdot\frac{x}{6}\ -\ \frac{4x}{4}\ +\ \frac{1}{22}\cdot 22\ .$$

39. Oplæg (Dividere flerleddet størrelse)

a) Figur (a) svarer til udtryk (1), og figur (b) svarer til udtryk (2). For hver af de andre udtryk skal du finde ud af hvilken figur den svarer til.

$$(1)\ x \qquad (2)\ y \qquad (3)\ x+y \qquad (4)\ \frac{x}{3} \qquad (5)\ \frac{y}{3} \qquad (6)\ \frac{x+y}{3}$$

$$(7)\ \frac{x}{3}+\frac{y}{3} \qquad (8)\ \frac{x}{3}+y\ .$$



b) Hvilke af de 8 udtryk er lig hinanden?

c) Hvilke af følgende ligninger bliver sande uanset hvilket tal der indsættes for z?

$$1)\ \frac{3-z}{3} = 1-z \qquad 2)\ \frac{z-5}{5} = \frac{z}{5}-1 \qquad 3)\ \frac{2\cdot z}{2} = 1\cdot\frac{z}{2} \qquad 4)\ \frac{z\cdot 7}{7} = z\ .$$

40. Dividere flerleddet størrelse

40.1 Sætning: Man kan dividere en flerleddet størrelse med et tal ved at dividere hvert led med tallet. Fx vil

$$\frac{a+b-c}{k} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k} - \frac{c}{k} \quad \text{for alle tal } a,\ b,\ c \text{ og } k \text{ hvor } k \neq 0\ .$$

Eksempler

$$\frac{8\cdot x-5}{3} = \frac{8}{3}\cdot x - \frac{5}{3} \quad , \qquad \text{da } \frac{8\cdot x}{3} = \frac{8}{3}\cdot x \text{ ifølge 37.2 .}$$

$$\frac{6\cdot x+12}{3} = 2\cdot x + 4$$

41. Opgave (Dividere flerleddet størrelse)

a) Divider $5\cdot x+10$ med 5 .

b) Skriv $\dfrac{4\cdot x+1}{2}$ på formen $a\cdot x+b$.

c) Divider $3-3x+21y$ med 3 .

d) Reducér $\dfrac{2x+4}{2}-x$.

42. Opgave (Repetition)

a) Reducér:

1) $\dfrac{6-8x}{2}$ 2) $6x-(3-4x)$ 3) $6x-\dfrac{6-8x}{2}$ 4) $7+x-\dfrac{6x+3}{3}$.

b) Er det der trækkes fra $6x$ i 2), lig det der trækkes fra $6x$ i 3) ?

c) Giver 2) og 3) samme resultat ?

d) Reducér

1) $-x-\dfrac{4x+4}{4}$ 2) $2\cdot\dfrac{x}{2}-\dfrac{6-6x}{3}$.

43. Opgave (Repetition)

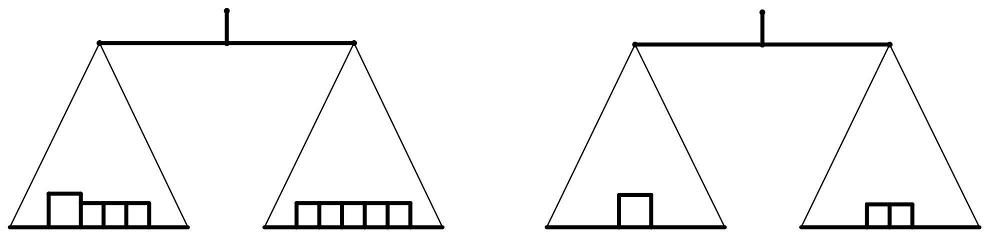
Brug 37.1 og 31.1 til at bevise at

$$\frac{a+b-c}{k} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k} - \frac{c}{k} \quad \text{for alle tal } a,\ b,\ c \text{ og } k \text{ hvor } k \neq 0\ .$$

Løsning af ligninger

44. Oplæg (Løsning af ligninger)

Et bageri er ved at opfinde en ny kage. Figur 1 er et spionfotografi som viser at 1 ny kage og 3 standardkager har samme vægt som 5 standardkager. Hvis man havde fjernet 3 standardkager fra hver af vægtskålene, måtte der stadig have været ligevægt som vist på figur 2.



Figur 1 Figur 2

Vægten af en standardkage er 1 vægtenhed, så oplysningen fra figur 1 er $x+3 = 5$ hvor x er vægten af den nye kage. Trækkes 3 fra begge ligningens sider, fås $x = 2$ som er oplysningen på figur 2.

Du skal nu lave en ny version af ovenstående seks linjer og to figurer. I den nye version skal spionfotografiet svare til ligningen $3 \cdot x = 6$.

45. Løsning af ligninger

45.1 Definition: I nogle ligninger indgår en ubekendt der er x eller et andet bogstav. De tal der gør ligningen sand når de indsættes for den ubekendte, kaldes *ligningens løsninger*. At *løse en ligning* vil sige at finde løsningerne.

Eksempler

a) $x \cdot x = 4$ Løsningerne: -2 og 2 .

b) $0 \cdot x = 0$ Løsningerne: Alle tal .

c) $x = x+1$ Løsningerne: Ingen .

d) $17x = 11+8x$ Løsningerne: $\frac{11}{9}$.

For ligningerne b) og c) kan man direkte se hvilke tal der passer på x's plads.

Ved at bruge reglerne i 45.2 nedenfor kan ligningen d) omskrives til ligningen $x = \frac{11}{9}$ der er så simpel at vi direkte kan se hvilke tal der passer på x's plads.

45.2 Sætning

Man får en ny ligning med samme løsninger hvis man

1) Lægger samme tal til begge ligningens sider.
2) Trækker samme tal fra begge ligningens sider.
3) Ganger begge ligningens sider med samme tal som ikke er 0.
4) Dividerer begge ligningens sider med samme tal som ikke er 0.

Eksempel

Følgende ligning skal løses:

$$5x+4 \;=\; 2x-4$$

Fra begge sider trækkes $2x$ og 4:

$$3x \;=\; -8$$

Begge sider divideres med 3:

$$x \;=\; -\tfrac{8}{3}$$

Løsningen er $\underline{\underline{-\tfrac{8}{3}}}$.

46. Opgave (Løsning af ligning)

a) Hvilke tal er løsning til ligningen $0 \cdot x \;=\; 1$?

b) Hvilke tal er løsning til ligningen $0+x \;=\; x$?

c) Nedenfor er skrevet tre ligninger. Uden at løse dem skal du begrunde at to af dem har samme løsninger.

1) $\tfrac{1}{2}x \;=\; x-4$ 2) $x \;=\; 2x-4$ 3) $x \;=\; 2x-8$.

47. Opgave (Løsning af ligning)

a) Gang $\dfrac{x}{6}$ med 6 . b) Reducér $8 \cdot \dfrac{x}{8}$. c) Divider $7x$ med 7 . d) Reducér $\dfrac{12x}{12}$.

e) Brug reglerne fra 45.2 til at løse følgende ligninger:

1) $\dfrac{x}{22} \;=\; 3$ 2) $50x \;=\; -200$ 3) $x \;=\; 2x+16$.

f) Gang $\dfrac{1}{3}x$ med 3 . g) Gang $\dfrac{2x}{3}+5$ med 3 . h) Reducér $4 \cdot (2-\tfrac{3}{4}x)$.

i) Løs følgende ligninger:

1) $\dfrac{x}{2}+3 \;=\; \dfrac{5}{2}$. 2) $x-4 \;=\; \tfrac{1}{5}x$. 3) $\tfrac{1}{12}(12x+12) \;=\; 17$.

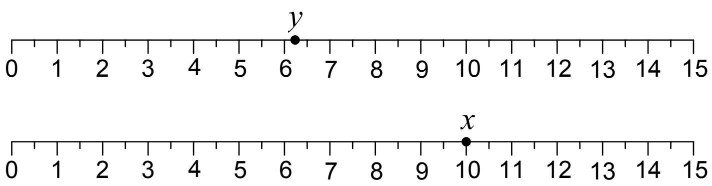
Sammenhænge mellem variable

48. Oplæg (Variable størrelser)

På en computerskærm er vist et kvadrat samt de to tallinjer nedenfor.

– Man kan ændre kvadratets omkreds ved at bruge musen til at flytte prikken på den nederste tallinje.
– Prikken på den øverste tallinje flyttes automatisk så den hele tiden viser kvadratets areal.
– På skærmen har man valgt at bruge bogstaverne x og y som navne for følgende to variable størrelser:

x = kvadratets omkreds $\qquad$ y = kvadratets areal



a) Hvis x er 12, hvad er så y?

b) Hvis x er k, hvad er så y?

c) Skriv en ligning $y = \ldots$ som angiver hvordan y kan beregnes ud fra x.

d) Brug ligningen fra c) til at finde tre par af *sammenhørende værdier* af de to variable.

49. Variable størrelser

49.1 Definition: *Variable talstørrelser* er størrelser der kan have forskellige talværdier. Fx er *omkreds* og *areal* af et kvadrat to variable størrelser. Hvis en variabel kan have et bestemt tal som værdi samtidig med at en anden variabel har et andet bestemt tal som værdi, så kaldes de to tal *sammenhørende værdier* af de to variable.

Eksempel

Forestil dig at du er på ferie et sted hvor prisen for en taxatur er 2,50 kr. pr. kørt km. Vi vælger at bruge de to bogstaver s og p som navne for følgende variable størrelser:

s = længden af den kørte strækning, målt i km $\qquad$ p = prisen i kr.

Sammenhængen mellem de to variable størrelser kan angives ved ligningen

$$p = 2{,}5 \cdot s \ .$$

Indsættes 4 for s, fås $p = 10$, så 4 og 10 er *et par af sammenhørende værdier*.

50. Opgave (Variable størrelser)

Til Sørens fødselsdag vil gæsterne forære ham en cd-afspiller til 800 kr.

a) Hvor meget skal hver gæst betale hvis der er 10 gæster?

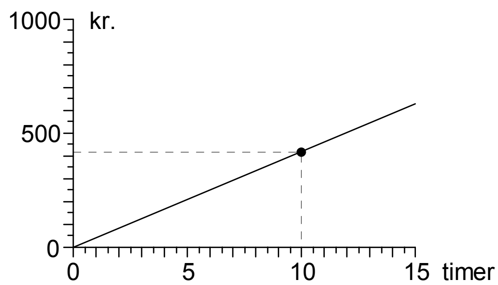
b) Hvor meget skal hver gæst betale hvis der er 4 gæster?

c) I problemet i denne opgave indgår to variable størrelser. Vælg bogstaver som navne for disse, og skriv en ligning der angiver sammenhængen mellem dem.

d) Skriv tre par af sammenhørende værdier af de to variable.

51. Oplæg (Graf)

Peters udgifter til mobilsnak er en fast minutpris. På en computerskærm er vist *grafen* nedenfor som viser sammenhængen mellem taletid og pris. Når prikken, der kan trækkes frem og tilbage på grafen, står i et punkt, kan man aflæse punktets koordinater ved hjælp af de punkterede linjer. Punktet med førstekoordinat 10 har andenkoordinat 420, dvs. til en taletid på 10 timer svarer en pris på 420 kr.



Problemet i dette oplæg indeholder to variable størrelser. Vælg to bogstaver som navne for disse, og skriv en ligning der angiver sammenhængen mellem dem.

Skriv tre par af sammenhørende værdier af de to variable.

52. Graf

52.1 Definition: Antag at der er givet en sammenhæng mellem to variable størrelser, og at der er tegnet et koordinatsystem hvor den ene størrelse er på førsteaksen og den anden er på andenaksen. *Grafen* for den pågældende sammenhæng består af alle punkter hvor de to koordinater er sammenhørende værdier af de to størrelser.

Eksempel

I et koordinatsystem er tegnet grafen for sammenhængen mellem følgende to variable størrelser:

mængde der leveres, målt i kg og *prisen i kr.*

Mængden er på førsteaksen, og prisen er på andenaksen.

Hvis et punkt på grafen har koordinatsættet $(60, 4900)$, så er 60 og 4900 sammenhørende værdier af *mængde* og *pris*, dvs. prisen for at få leveret 60 kg er 4900 kr.

Eksempel

Sammenhængen mellem to positive størrelser b og h er givet ved ligningen

$$h = \frac{12}{b}.$$

Vi vil tegne grafen for denne sammenhæng sådan at b er på førsteaksen og h er på andenaksen:

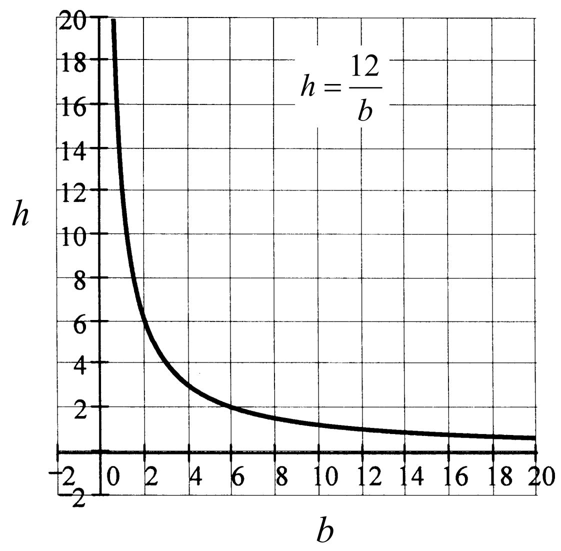
Når $b = 0{,}6$, er $h = \frac{12}{0{,}6} = 20$, så $(0{,}6\,,\,20)$ er koordinatsættet til et punkt på grafen.

På tilsvarende måde kan vi finde flere punkter på grafen.

Vi afsætter dem i koordinatsystemet og tegner en blød kurve igennem dem.

En anden mulighed er at bruge computer til at tegne grafen. Så bliver grafen mere nøjagtig da computeren udregner flere punkter på grafen.

Nedenfor er grafen tegnet ved hjælp af computer.



53. Opgave (Graf)

a) Om to variable størrelser x og y gælder:

1) Når $x = -5$, er $y = 1$.

2) Hver gang x øges med 1, øges y med $\frac{1}{2}$.

Tegn grafen for sammenhængen mellem x og y sådan at x er på førsteaksen.

b) Når størrelsen af et bestemt rektangel på en computerskærm ændres ved at trække med musen, vedbliver højden at være 1 større end bredden.

Tegn grafen for sammenhængen mellem rektanglets areal A og bredde b sådan at b er på førsteaksen.

Skriv en ligning som viser hvordan A kan beregnes ud fra b.

54. Oplæg (Konstant)

På en skærm er et rektangel der kan ændres. Bredde, højde og areal kaldes hhv. k , x og y .

a) På skærmen skriver vi hvilket tal k skal være. Uden at ændre på k lader vi efter tur x få forskellige værdier. Hver gang x får en ny værdi, får y automatisk en ny værdi. I tabellen er vist nogle af de sammenhørende værdier af x og y .

x	3	3,2	3,5	4
y	4,5	4,8	5,25	6

Hvilket tal startede vi med at skrive som værdien af *konstanten* k ?

b) Vi starter forfra og sætter *konstanten* k til 3,1 . Så lader vi igen x få forskellige værdier. Hvilke værdier får y når x får de værdier som står i øverste række i tabellen?

55. Konstant

55.1 Definition: Når det i forbindelse med nogle variable størrelser angives at en størrelse er *konstant*, så betyder det at dens talværdi ikke ændres når værdierne af de pågældende variable størrelser ændres.

Man kan begynde forfra, give *konstanten* en ny værdi, og derefter ændre på værdierne af de variable størrelser mens konstanten hele tiden har den nye værdi.

Eksempel
En forretning har to priser for hver af deres varer. Den ene pris p er for kunder der henter varen, den anden pris q er for kunder der skal have sendt varen. Forskellen på de to priser er et fast beløb u som er det samme for alle varer. Det ses at sammenhængen mellem de variable størrelser p og q kan udtrykkes ved ligningen

$$q = p + u$$

hvor u er *konstant*.

Selv om værdien af u kan ændres en gang imellem, er u stadig en konstant i forbindelse med de variable størrelser p og q da værdien af u er den samme uanset hvilke værdier p og q har.

Antallet d af dage siden forretningen åbnede, er en variabel størrelse. I forbindelse med den variable størrelse d er u ikke en konstant.

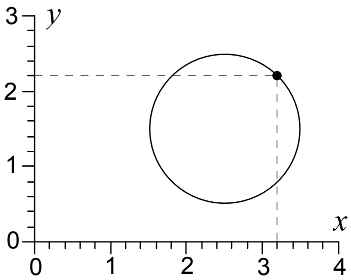
56. Opgave (Konstant)

Sammenhængen mellem to variable t og N er givet ved $N = \frac{t}{c}$ hvor c er en konstant.

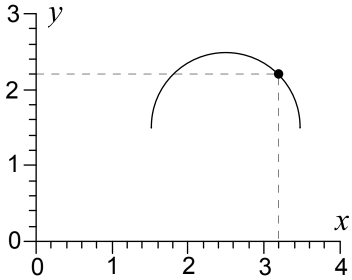
Sæt $c = 2$ og tegn grafen for sammenhængen mellem t og N sådan at t er på førsteaksen og N er på andenaksen. (Se 52.1).
Tegn i samme koordinatsystem grafen svarende til $c = \frac{1}{2}$.

57. Oplæg (Funktion)

Grafen på figur 1 angiver sammenhængen mellem to variable x og y . Ifølge 52.1 er to tal sammenhørende værdier af x og y hvis de er hhv. førstekoordinat og andenkoordinat til et punkt på grafen. Figuren er på en computerskærm, og når prikken flyttes hen på et punkt, kan man aflæse dette punkts koordinater ved hjælp af de punkterede linjer.



Figur 1



Figur 2

Det ses at x-værdien 3,2 hører sammen med y-værdien 2,2 .

a) Hvilken anden y-værdi hører sammen med x-værdien 3.2 ?

Grafen på figur 2 viser en anden sammenhæng mellem to variable x og y .

b) Nævn to y-værdier der hører til samme x-værdi, eller skriv at det ikke kan lade sig gøre.

c) Nævn to x-værdier der hører til samme y-værdi, eller skriv at det ikke kan lade sig gøre.

58. Funktion

58.1 Definition: Hvis der er givet en sammenhæng mellem to variable størrelser a og b , så siges a at være en funktion af b hvis der ikke er to forskellige værdier af a der hører sammen med samme værdi af b .

Eksempler

Figur 1 i ramme 57:

y er ikke en funktion af x .

x er ikke en funktion af y .

Figur 2 i ramme 57:

y er en funktion af x .

x er ikke en funktion af y .

58.2 Vedtægt

Hvis der står at man skal tegne

grafen for en variabel a *som funktion af en anden variabel*,

så gælder at

variablen på andenaksen skal være a

dvs.

variablen på andenaksen er den variabel hvorom det er sagt at den er en funktion af en anden variabel.

58.3 Vedtægt

Hvis der står at man skal skrive

en *regneforskrift for en variabel* a *som en funktion af en variabel* b ,

så gælder at man skal skrive

en ligning på formen

$a = \ldots$

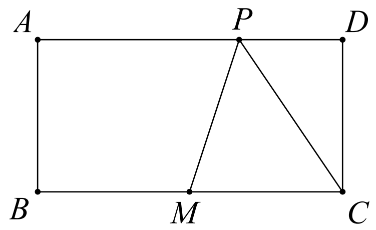
hvor der på prikkernes plads står et udtryk der ikke indeholder andet end konstanter og/eller b

dvs.

variablen før lighedstegnet er den variabel hvorom det er sagt at den er en funktion af en anden variabel.

59. Opgave (Funktion)

Figuren viser et rektangel $ABCD$ med bredde 4 og højde 2. Punktet M er midtpunkt af siden BC, og punktet P kan trækkes frem og tilbage på linjestykket AD.



a) Er længden af MP en funktion af længden af CP ?

b) Er længden af CP en funktion af længden af MP ?

c) Er længden af MC en funktion af længden af AP ?

d) Er længden af AP en funktion af længden af MC ?

e) Tegn grafen for længden s af AP som funktion af længden t af PD.

f) Skriv en regneforskrift for s som funktion af t.

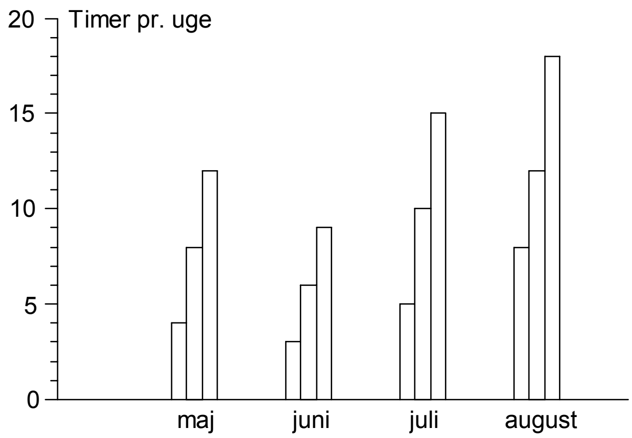
g) Tegn grafen for længden y af CD som funktion af længden x af PD.

Proportionale størrelser

60. Oplæg (Proportionale størrelser)

Peter, Søren og Mette har oprettet et internetfirma. Figuren viser hvor mange timer de bruger på arbejdet:

Peter: første søjle, Søren: anden søjle, Mette: tredje søjle .



a) Hvad skal man gange Sørens maj-timetal med for at få Mettes maj-timetal?

b) Angiv for hver af månederne juni, juli og august hvad man skal gange Sørens timetal med for at få Mettes timetal.

c) Angiv for hver af månederne maj, juni, juli og august hvad man skal gange Peters timetal med for at få Sørens timetal. Er det samme tal man skal gange med i alle fire måneder?

61. Proportionale størrelser

61.1 Definition

Når man om to størrelser x og y siger at

y er proportional med x

betyder det at

der findes en konstant a forskellig fra nul så $y = a \cdot x$.

Tallet a kaldes *proportionalitetsfaktoren*.

Eksempel 1

Hvis

kiloprisen for tomater er 20 kr.
x er den købte mængde tomater, målt i kg
y er prisen i kr. for den købte mængde

så må

$$y = 20 \cdot x$$

dvs.

y er proportional med x
proportionalitetsfaktoren er 20.

Eksempel 2

Hvis

r er radius i en cirkel

O er cirklens omkreds

så er

$$O = 2\pi \cdot r$$

dvs.

omkredsen er proportional med radius
proportionalitetsfaktoren er 2π .

61.2 Sætning

Hvis

y er proportional med x

så gælder

x er proportional med y .

Bevis

Hvis y er proportional med x, findes et tal $a \neq 0$ så

$$y = a \cdot x \ .$$

Divideres begge sider af denne ligning med a, fås

$$\frac{1}{a} \cdot y = x$$

dvs. x er proportional med y med proportionalitetsfaktoren $\frac{1}{a}$.

Eksempel 3

Om to proportionale størrelser s og t er oplyst at når $t = 3$ er $s = 2{,}4$.

På grund af proportionaliteten må findes en konstant k som ganget med t giver s . Da $3 \cdot k = 2{,}4$, må $k = 0{,}8$.

Når vi kender værdien af t, kan vi altså gange denne værdi med $0{,}8$ for at finde s .

Og når vi kender værdien af s, kan vi dividere denne værdi med $0{,}8$ for at finde værdien af t.

61.3 Sætning

Der gælder at

to størrelser x og y er proportionale

hvis og kun hvis

grafen for y som funktion af x er en ret linje gennem $O(0, 0)$.

62. Opgave (Proportionale størrelser)

Størrelserne x og y er proportionale, og når $x = 1$ er $y = 0{,}75$.

a) Når $x = 3{,}6$, hvad er så y?

b) Når $y = 1$, hvad er så x?

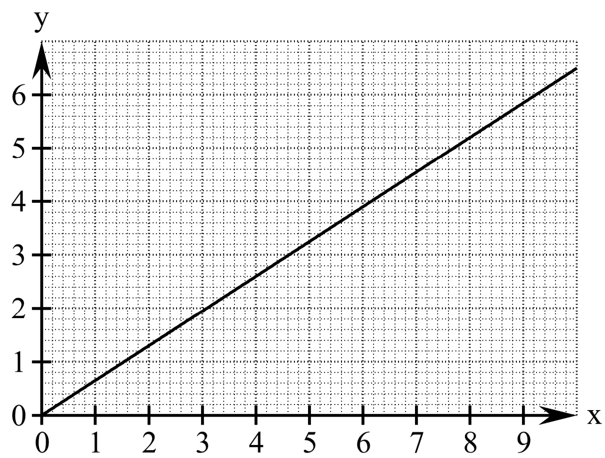
c) Tegn grafen for y som funktion af x.

63. Opgave (Proportionale størrelser)

Figuren viser grafen for y som funktion af x.

a) Gør rede for at y er proportional med x.

b) Find den proportionalitetsfaktor som man skal gange x med for at få y.



c) Med hvor meget øges y hver gang x øges med 1 ?

d) Med hvor meget øges y når x øges med 8 ?

64. Opgave (Proportionale størrelser)

Mette er inde på en side på internettet hvor alle billederne tager lige lang tid at downloade.

Da hun downloadede 64 billeder tog det 25,6 minut.

a) Hvor lang tid vil det tage at downloade 20 billeder?

b) Hvor lang tid vil det tage at downloade x billeder?

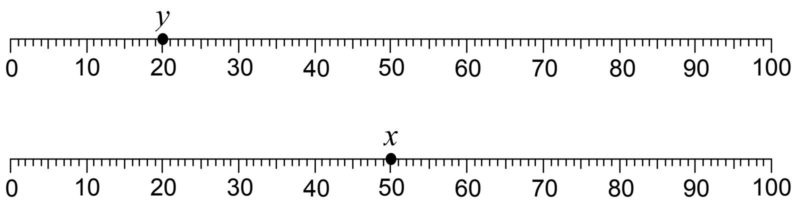
Vi sætter

x = antal billeder

y = download-tid i minutter

c) Skriv en regneforskrift for y som funktion af x. (Se 58.3).

Sammenhængen mellem x og y er anskueliggjort i et computerprogram der viser de to tallinjer nedenfor. Man kan ændre tallet x ved at trække punktet med musen. Så ændres tallet y automatisk.



d) Hvad sker der med y hver gang x får en tilvækst på 1, dvs hver gang x-prikken rykkes 1 enhed mod højre?

e) Hvad sker der med y hver gang x fordobles?

65. Opgave (Proportionale størrelser)

a) Er arealet af en cirkel proportional med cirklens radius?

b) Det oplyses at diagonalen i et kvadrat er proportional med kvadratets side. Bestem proportionalitetsfaktoren.

c) En bestemt mosaik består af forskellige geometriske figurer. Der er mange forskellige trekanter, men de har alle grundlinje 3. Gør rede for at disse trekanters arealer er proportionale med deres højder, og angiv proportionalitetsfaktoren.

66. Opgave (Repetition)

I beviset for 61.2 står at når man i ligningen $y = a \cdot x$ dividerer begge sider med a, så fås ligningen $\frac{1}{a} \cdot y = x$.

Brug reglerne fra ramme 37 til at begrunde dette.

Matematisk model

67. Oplæg (Matematisk model)

Der graves en grøft. Tabellen viser grøftens længde som funktion af den tid der er anvendt til gravearbejdet.

Timer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Meter	5,0	10,6	16,0	21,6	26,5	30,4	36,8	39,4	43,6	48,2

De grafpunkter der er angivet i tabellen, er indtegnet som krydser i koordinatsystemet nedenfor. Vi ser:

punkterne ligger ikke nøjagtigt på samme linje gennem $O(0, 0)$,

dvs.

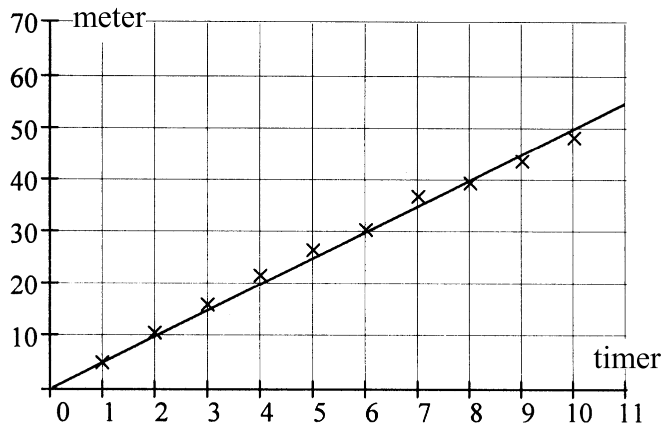
længden er ikke nøjagtigt proportional med den anvendte tid,

så

der er ikke gravet præcist lige meget hver time.

men

den sammenhæng mellem længde og tid som linjen er graf for, er en *matematisk model* som med god tilnærmelse beskriver forholdene.



a) Hvad er proportionalitetsfaktoren i den matematiske model.

b) Benyt modellen til at besvare spørgsmålet: Hvor mange meter grøft graves på 1 time?

c) Skriv en ligning som angiver den sammenhæng der i modellen er mellem tid og længde.

d) Grøftegraverne skønner at modellen også vil passe på det fortsatte grøftegraveri. Hvis dette er rigtigt, hvor lang tid vil det så tage at grave 100 meter grøft?

68. Matematisk model

På figuren i ramme 67 ses:

- En graf der viser en matematisk sammenhæng.
- Nogle punkter der viser en målt sammenhæng.
- At den matematiske sammenhæng er en god tilnærmelse til den målte.

Man siger at

den matematiske sammenhæng er en *matematisk model* af sammenhængen mellem de to størrelser fra virkeligheden.

Matematiske modeller er uundværlige:

Når man har erfaret at en model passer godt i en bestemt type tilfælde, så kan modellen i disse tilfælde bruges til at besvare spørgsmål om virkeligheden.

69. Opgave (Matematisk model)

I et computerspil har Peter anbragt to robotter i forskellige afstande fra hinanden og derefter taget tid på hvor lang tid der går inden de støder sammen. Disse afstande og tider står i tabellen.

Meter	10	20	30	40	50	60	70	80
Sekunder	14	24	38	49	58	74	84	96

a) Tegn et koordinatsystem og afsæt heri de grafpunkter som er angivet i tabellen.

b) Tegn grafen for en proportionalitet der kan bruges som model for sammenhængen mellem afstand og tid.

c) Skriv en ligning der angiver den sammenhæng der i modellen er mellem afstand og tid.

d) Brug modellen til at finde ud af hvor langt der er mellem to robotter 20 sekunder før de støder sammen.

e) Afstanden mellem to robotter er 30 meter. Brug modellen til at finde ud af hvor lang tid der går inden de støder sammen.

Omvendt proportionale størrelser

70. Oplæg (Omvendt proportionale størrelser)

To variable størrelser x og y er givet ved

x : kilopris i kr.

y : Mængde (i kg) der kan fås for 100 kr.

a) Bestem y når x er hhv. 1, 2, 10, 50 og 100.
b) Bestem y når x er p .

71. Omvendt proportionale størrelser

71.1 Definition

Når man om to størrelser x og y der ikke er nul, siger at

y er omvendt proportional med x

betyder det at

der findes en konstant a forskellig fra nul så $y = \dfrac{a}{x}$.

Eksempel

Hvis
nogle rektangler har arealet 20
b er bredden af et af disse rektangler
h er højden af det samme rektangel

så må

$$h = \frac{20}{b}$$

dvs.

h er omvendt proportional med b .

71.2 Sætning

Hvis $y = \dfrac{a}{x}$, så er $x = \dfrac{a}{y}$,

dvs. hvis der gælder at

y er omvendt proportional med x

så gælder der også at

x er omvendt proportional med y .

Bevis

Hvis man i ligningen

$$y = \frac{a}{x}$$

ganger med x og dividerer med y på begge sider, så fås

$$x = \frac{a}{y} \ .$$

Eksempel

Om to omvendt proportionale størrelser s og t er oplyst at når $t = 3$, er $s = 2{,}4$.

Da s og t er omvendt proportionale, findes en konstant k som divideret med t giver s. Da $\frac{k}{3} = 2{,}4$, må $k = 7{,}2$.

Uanset hvilken af størrelserne s og t vi kender, så kan vi finde den anden ved at dividere $7{,}2$ med den kendte størrelse.

71.3 Sætning

At $y = \frac{a}{x}$ er ensbetydende med at $y = a \cdot \frac{1}{x}$,

dvs. x og y er omvendt proportionale

hvis og kun hvis $\frac{1}{x}$ og y er proportionale.

Bevis

Af 37.1 fås at $\frac{a}{x} = a \cdot \frac{1}{x}$.

Eksempel

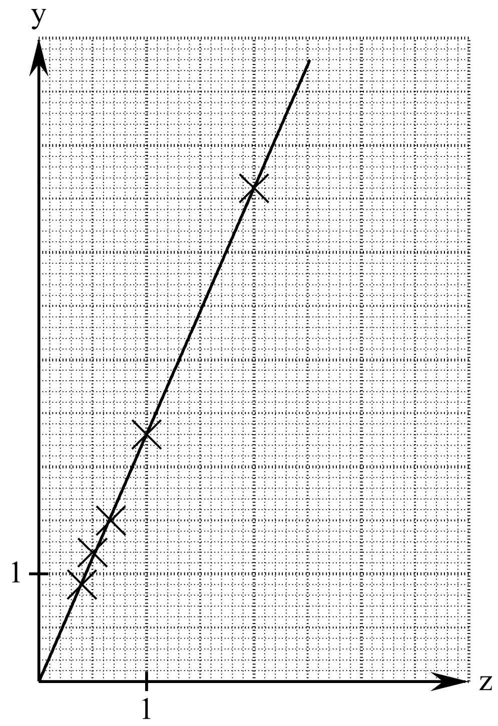
Mette vil undersøge om to størrelser x og y er omvendt proportionale. Derfor har hun målt fem par af sammenhørende værdier:

x	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
y	4,6	2,3	1,5	1,2	0,9

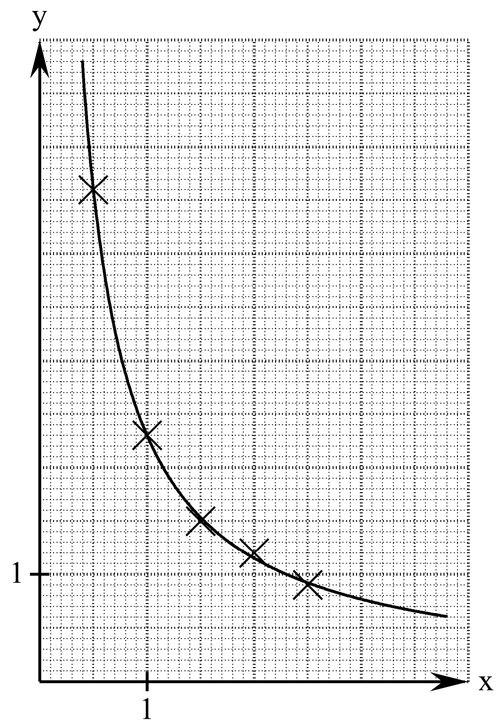
Mette kender sætning 71.3 , så for hver af de målte værdier af x udregner hun værdien af størrelsen $z = \frac{1}{x}$:

x	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
z	2,0	1,0	0,67	0,50	0,40
y	4,6	2,3	1,5	1,2	0,9

Grafpunkterne svarende til de fem par af sammenhørende værdier af z og y er vist på figur 1 nedenfor.



Figur 1



Figur 2

Nu kan Mette bruge sætning 61.3 , og hun skriver:

Punkterne ligger ca. på samme linje gennem $O(0, 0)$, så der gælder med god tilnærmelse at y er proportional med z.

Da punktet $(z, y) = (2{,}3 , 5{,}3)$ ligger på linjen, er proportionalitetsfaktoren a bestemt ved at $2{,}3 \cdot a = 5{,}3$, dvs. $a = \dfrac{5{,}3}{2{,}3} = 2{,}304\cdots \approx 2{,}30$.

Så er

$$y = 2{,}30 \cdot z = 2{,}30 \cdot \frac{1}{x} .$$

En god model for sammenhængen mellem x og y er altså givet ved ligningen

$$y = \frac{2{,}30}{x} .$$

Grafen for denne sammenhæng er tegnet på figur 2 sammen med de målte punkter.

72. Opgave (Omvendt proportionale størrelser)

Størrelserne x og y er omvendt proportionale, og når $x = 1$ er $y = 60$.

a) Når $x = 15$, hvad er så y?

b) Når $y = 40$, hvad er så x?

c) Tegn grafen for y som funktion af x.

73. Opgave (Omvendt proportionale størrelser)

I elevrådet taler de om hvor lang tid det tager at løse opgaver i grupper. Nogle påstår at tiden er omvendt proportional med antallet af elever i gruppen. For at kontrollere påstanden undersøger de for to forskellige opgaver hvor lang tid grupper af forskellig størrelse gennemsnitligt bruger. Resultaterne står i tabellerne nedenfor.

Første opgave				
Antal elever	1	2	3	4
Tid i timer	2,9	2,3	2,0	1,9

Anden opgave				
Antal elever	1	2	3	4
Tid i timer	3,4	1,9	1,3	0,9

Undersøg for hver af opgaverne om man med rimelighed kan bruge en omvendt proportionalitet som model for sammenhængen mellem tiden og antallet af elever. Hvis man kan, skal du skrive en ligning der viser sammenhængen mellem tid og antal elever.