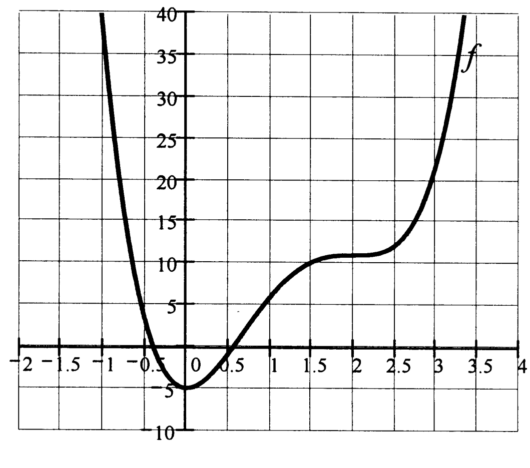
Eksempler på problemløsning med differentialregning



2004 Karsten Juul

Opgave 1:   Monotoniforhold

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) \;=\; 1+\frac{2}{3-x} \quad , \qquad x \neq 3 \,.$$

Bestem monotoniforholdene for f .

Besvarelse af opgave 1

Først differentierer vi f :

$$f'(x) \;=\; 1' + \frac{2' \cdot (3-x) - 2 \cdot (3-x)'}{(3-x)^2} \;=\; 0 + \frac{0 \cdot (3-x) - 2 \cdot (-1)}{(3-x)^2} \;=\; \frac{2}{(3-x)^2} \;.$$

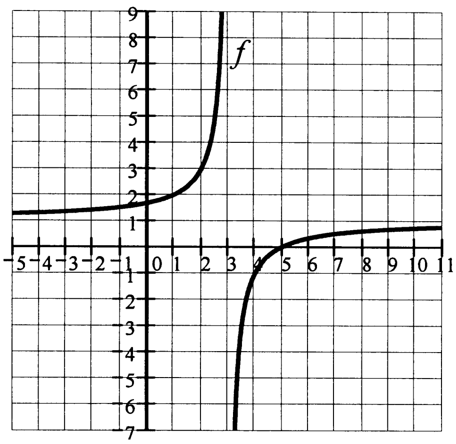
Da $3-x \neq 0$, er $(3-x)^2$ positiv, så $f'(x)$ er positiv.

Da $]-\infty;3[$ er et interval, og $f'(x)$ er positiv for ethvert x i dette interval, gælder at
f er voksende i $]-\infty;3[$.

Da $f'(x)$ også er positiv for hvert x i intervallet $]3;\infty[$, gælder at
f er voksende i $]3;\infty[$.

Kommentarer til opgave 1

For at prøve at finde eventuelle fejl i ovenstående udregninger, tegner vi grafen for f ved hjælp af computeren. (En sådan graf kan evt. afleveres som en del af besvarelsen).



Uanset hvordan vi på billedet afsætter to punkter på den venstre del af grafen, gælder:

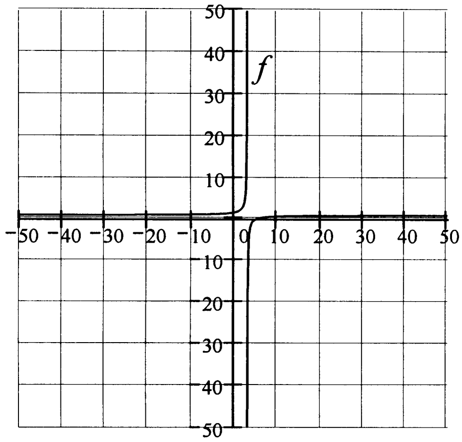
Punktet med størst x-koordinat har også størst y-koordinat.

Dvs. påstanden om at f er voksende i $]-\infty;3[$, er ikke i modstrid med billedet.

På tilsvarende måde ses at påstanden om at f er voksende i $]3;\infty[$, heller ikke er i modstrid med billedet.

Bemærk at f ikke er voksende i sin definitionsmængde: Hvis vi vælger to punkter på grafen hvor det ene har x-koordinat mindre end 3, og det andet har x-koordinat større end 3, så vil det af punkterne der har størst x-koordinat, ikke have større y-koordinat end det andet.

Billedet ovenfor viser kun en del af grafen. For at få en bedre kontrol af vores resultat kan vi fremstille flere billeder der viser forskellige udsnit af koordinatsystemet, bl.a. følgende:



Opgave 2: Monotoniforhold

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) \;=\; 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 5 .$$

Bestem monotoniforholdene for f.

Besvarelse af opgave 2

Først differentierer vi f:

$$f'(x) \;=\; 3\cdot 4x^3 - 16\cdot 3x^2 + 24\cdot 2x - 0 \;=\; 12x^3 - 48x^2 + 48x \;.$$

Derefter bestemmer vi de tal x for hvilke denne differentialkvotient er nul:

$$\begin{aligned} & 12x^3 - 48x^2 + 48x \;=\; 0 \\ \Leftrightarrow\quad & 12x\cdot(x^2 - 4x + 4) \;=\; 0 \\ \Leftrightarrow\quad & 12x \;=\; 0 \quad\vee\quad x^2 - 4x + 4 \;=\; 0 \\ \Leftrightarrow\quad & x = 0 \quad\vee\quad x = 2 \end{aligned}$$

For 2.gradsligningen er $d = (-4)^2 - 4\cdot 1\cdot 4 = 0$, så den har én løsning: $\dfrac{-(-4)}{2\cdot 1} = 2$

Da $f'(x)$ er defineret for alle tal og er kontinuert, kan den kun skifte fortegn der hvor den er 0, dvs. ved x-værdierne 0 og 2.

Da $f'(-1) = -108$, $f'(1) = 12$ og $f'(3) = 36$, fås derfor:

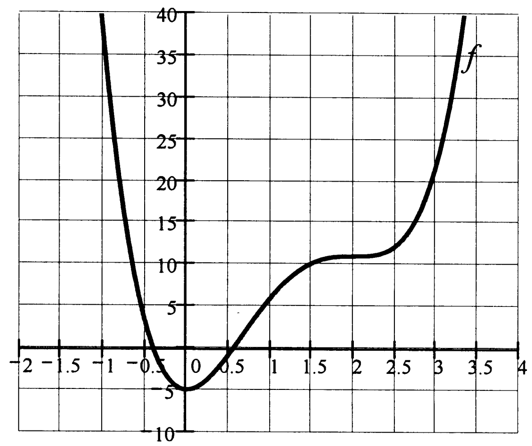
$x:$		0		2	
$f'(x):$	$-$	0	$+$	0	$+$

I intervallet $]-\infty;0]$ er $f'(x)$ negativ eller 0, og kun 0 når x er 0. Derfor gælder:
f er aftagende i $]-\infty;0]$.

I intervallet $[0;\infty[$ er $f'(x)$ positiv eller 0, og kun 0 når x er 0 eller 2. Derfor gælder:
f er voksende i $[0;\infty[$.

Kommentarer til opgave 2

For at få en vis kontrol af om at resultatet er rigtigt, tegner vi grafen for f ved hjælp af computeren.



De monotoniforhold vi har fundet frem til, er ikke i modstrid med billedet. Men på billedet kan ikke ses om funktionen omkring x lig 2 vokser eller aftager langsomt, eller evt. er konstant. Vi udregner y-koordinaterne til nogle punkter med x-koordinat nær 2:

$$f(1{,}9) = 10{,}992300$$
$$f(1{,}99) = 10{,}999992$$
$$f(2) = 11{,}000000$$
$$f(2{,}1) = 11{,}008300$$

Hermed er bestemt fire punkter på grafen. Det ses at ligegyldig hvilke to af disse punkter vi ser på, så vil det med størst x-koordinat også have størst y-koordinat. Dette er i overensstemmelse med at vi ovenfor regnede os frem til at funktionen var voksende i et interval der indeholder de pågældende x-værdier.

Opgave 3: Mindsteværdi

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 5 .$$

Bestem mindsteværdien for f .

Besvarelse af opgave 3

I opgave 2 undersøgte vi monotoniforholdene for denne funktion. Da f er aftagende i $]-\infty; 0]$ og voksende i $[0; \infty[$, er 0 minimumssted. Minsteværdien er derfor $f(0) = \underline{\underline{-5}}$.

Kommentarer til opgave 3

På billedet ovenfor er vist en del af grafen for f . Det nederste punkt på den viste del af grafen ses at have en y-koordinat der er ca. -5 . Den fundne mindsteværdi er altså ikke i modstrid med billedet.

Bemærk at vi ikke på billedet kan se om der uden for det viste udsnit af koordinatsystemet er grafpunkter med mindre y-koordinat end -5 . At der ikke er sådanne punkter, følger af vores undersøgelse af monotoniforholdene.

Opgave 4: Lokale ekstremumssteder

Om en funktion f oplyses at fortegn og nulpunkter for f' er som angivet på tallinjen:

x:		-1		2		4	
$f'(x)$:	+	0	–	0	+	0	+

Angiv de lokale ekstremumssteder for f .

Besvarelse af opgave 4

Af tallinjen ses at f er voksende i $]-\infty; -1]$ og aftagende i $[-1; 2]$. Heraf følger at $\underline{\underline{-1 \text{ er lokalt maksimumssted for } f}}$.

Da f er aftagende i $[-1; 2]$ og voksende i $[2; 4]$, gælder at $\underline{\underline{2 \text{ er lokalt minimumssted for } f}}$.

Da f er voksende i $[2; \infty[$, er der ikke flere lokale ekstremumssteder.

Kommentarer til opgave 4

Bemærk at 4 ikke er et lokalt ekstremumssted, selv om $f'(4) = 0$.

Opgave 5: Ligning for tangent

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \sqrt{5-x} .$$

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P\big(4, f(4)\big)$.

Besvarelse af opgave 5

For at differentiere f omskriver vi først forskriften sådan:

$$f(x) \;=\; \sqrt{5-x} \;=\; \sqrt{t} \;, \quad \text{hvor } t \;=\; 5-x \;.$$

Herefter differentierer vi:

$$f'(x) \;=\; \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot t' \;=\; \frac{1}{2\sqrt{5-x}} \cdot (-1) \;=\; \frac{-1}{2\sqrt{5-x}} \;.$$

Tangentens hældningskoefficient er

$$f'(4) \;=\; \frac{-1}{2\sqrt{5-4}} \;=\; -\frac{1}{2} \;.$$

Røringspunktets y-koordinat er

$$f(4) \;=\; \sqrt{5-4} \;=\; 1 .$$

Tangenten har ligningen

$$y-1 \;=\; -\frac{1}{2} \cdot (x-4)$$

som kan reduceres til

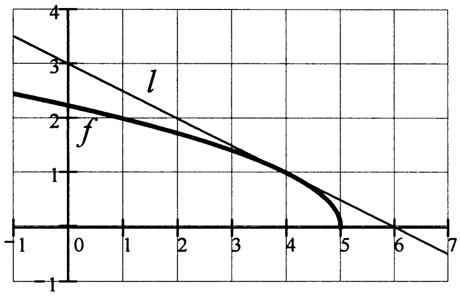
$$\underline{\underline{y \;=\; -\frac{1}{2}x+3}} \;.$$

Kommentarer til opgave 5

For at få en vis kontrol af facit tegner vi ved hjælp af computeren:

- Grafen for f.
- Den linje l som har ligningen $y \;=\; -\frac{1}{2}x+3$.

På billedet ser det ud til at l er tangent til grafen i punktet $P\big(4\,,\,f(4)\,\big)$.



Opgave 6: Røringspunkt for tangent

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) \;=\; x-2+\ln(x)\,.$$

Grafen for f har en tangent der har hældningskoefficienten $\frac{3}{2}$.

Bestem koordinatsættet til røringspunktet for denne tangent.

Besvarelse af opgave 6

Vi differentierer f :

$$f'(x) \;=\; 1-0+\frac{1}{x} \;=\; 1+\frac{1}{x}\;.$$

Da tangenten har hældningskoefficienten $\frac{3}{2}$, vil røringspunktets 1.koordinat x opfylde

$$f'(x) \;=\; \frac{3}{2}$$

dvs.

$$1+\frac{1}{x} \;=\; \frac{3}{2}\;.$$

Ved at løse denne ligning fås $x=2$.

Røringspunktets 2.koordinat er

$$f(2) \;=\; 2-2+\ln(2) \;=\; \ln(2)\,.$$

Altså er røringspunktets koordinatsæt $\underline{\underline{\big(\,2\,,\,\ln(2)\,\big)}}$.

Kommentarer til opgave 6

For at få en vis kontrol af facit tegner vi ved hjælp af computeren:

- Grafen for f .
- Punktet med koordinatsættet $\left(2, \ln(2)\right)$.
- Den linje l gennem dette punkt som har hældningskoefficienten $\frac{3}{2}$.

På billedet ser det ud til at det fundne punkt er røringspunkt for tangenten med hældningskoefficient $\frac{3}{2}$.