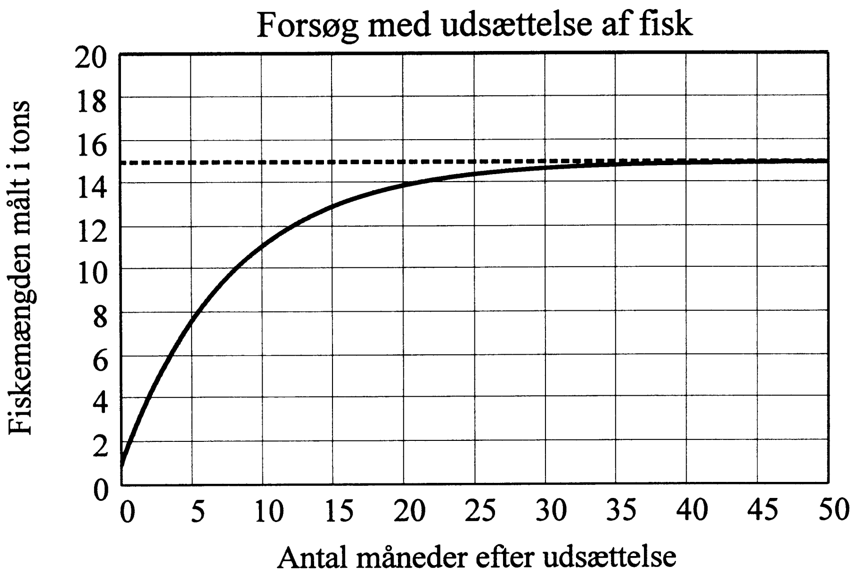
Asymptoter

for standardforsøgene i matematik i gymnasiet



2003 Karsten Juul

Indledning om lodrette asymptoter

Lad f være funktionen bestemt ved

$$f(x) = \frac{1}{x-2} + 1 \ , \qquad x \neq 2 \, .$$

Vi udregner funktionsværdierne i nogle x-værdier der er lidt større end 2:

$$f(2{,}5) = 3\,, \qquad f(2{,}1) = 11\,, \qquad f(2{,}01) = 101\,.$$

Det ses at funktionsværdierne bliver store, når x nærmer sig 2 fra højre. Man kan vise at

> det er muligt at få funktionsværdierne så store det skal være ved at vælge x tilstrækkelig tæt på 2 til højre for 2.

Dette skrives sådan:

(1) $\quad f(x) \to \infty$ for $x \to 2^+$.

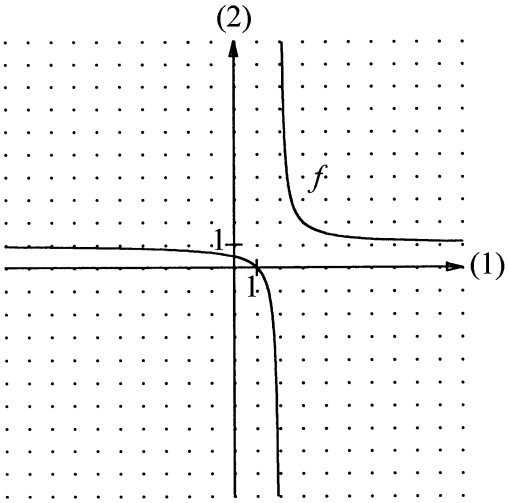
Dette symbol læses sådan:

> $f(x)$ går mod uendelig for x gående mod 2 fra højre.

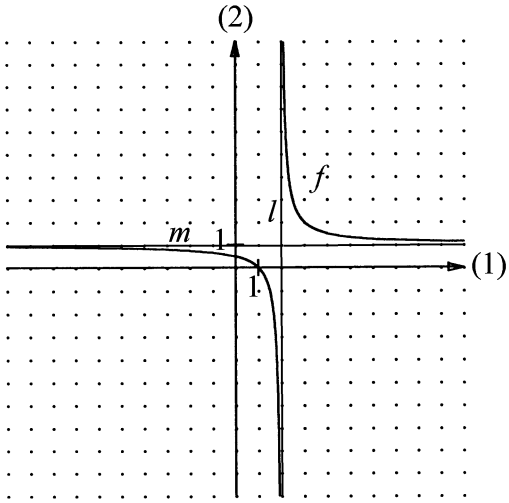
Grafen for f er vist på figur 1. Et uendelig langt stykke af den del af grafen der svarer til x-værdier større end 2, er næsten sammenfaldende med den lodrette linje l der består af alle punkter med førstekoordinat 2. Sådan må det være når (1) gælder, så når (1) gælder siger man at

> linjen med ligningen $x = 2$ er asymptote til grafen for f.

På figur 2 er asymptoten $l: \ x = 2$ tegnet.



Figur 1



Figur 2

Man kan vise at der også gælder

$$f(x) \to -\infty \text{ for } x \to 2^- .$$

Heraf følger at der også er et uendelig langt stykke af grafen til venstre for l som er næsten sammenfaldende med l. Der er altså to grunde til at l er asymptote til grafen for f.

Indledning om vandrette asymptoter

Lad stadig f være funktionen bestemt ved

$$f(x) = \frac{1}{x-2} + 1 \;, \quad x \neq 2 .$$

Vi udregner funktionsværdierne i nogle store *x*-værdier:

$$f(12) = 1\tfrac{1}{10} , \quad f(102) = 1\tfrac{1}{100} , \quad f(1002) = 1\tfrac{1}{1000} .$$

Det ses at funktionsværdierne kommer tæt på 1, når x bliver stor. Man kan vise at

> det er muligt at få funktionsværdierne så tæt det skal være på 1 ved at vælge x tilstrækkelig stor.

Dette skrives sådan:

(2) $\quad f(x) \to 1 \text{ for } x \to \infty .$

Dette symbol læses sådan:

> $f(x)$ går mod 1 for x gående mod uendelig.

Grafen for f er vist på figur 1. Et uendelig langt stykke af den højre del af grafen er næsten sammenfaldende med den vandrette linje m der består af alle punkter med andenkoordinat 1. Sådan må det være når (2) gælder, så når (2) gælder, siger man at

> linjen med ligningen $y = 1$ er asymptote til grafen for f.

På figur 2 er asymptoten $m: \; y = 1$ tegnet.

Man kan vise at der også gælder

$$f(x) \to 1 \text{ for } x \to -\infty .$$

Heraf følger at der også er et uendelig langt stykke af den venstre del af grafen som er næsten sammenfaldende med m. Der er altså to grunde til at m er asymptote til grafen for f.

Definition af lodret- og vandret asymptote

På de foregående sider bruges udtrykket at en uendelig lang del af grafen ”er næsten sammenfaldende med” en linje. Da dette udtryk kan betyde meget forskelligt, bruger vi i stedet formuleringer som (1) og (2) til at forklare hvad der menes når man siger at en linje er lodret eller vandret asymptote til grafen for en funktion.

Definition af lodret asymptote

En lodret linje l med ligningen

$$l:\ x = k$$

hvor k er en konstant, er asymptote til grafen for en funktion f, netop hvis mindst én af følgende fire påstande gælder:

$$f(x) \to \infty \quad \text{for} \quad x \to k^+$$

$$f(x) \to -\infty \quad \text{for} \quad x \to k^+$$

$$f(x) \to \infty \quad \text{for} \quad x \to k^-$$

$$f(x) \to -\infty \quad \text{for} \quad x \to k^-$$

Definition af vandret asymptote

En vandret linje l med ligningen

$$l:\ y = k$$

hvor k er en konstant, er asymptote til grafen for en funktion f, netop hvis mindst én af følgende to påstande gælder:

$$f(x) \to k \quad \text{for} \quad x \to \infty$$

$$f(x) \to k \quad \text{for} \quad x \to -\infty$$

Figur 3 viser grafen for en funktion f som opfylder at

$$f(x) \to 11 \text{ for } x \to 3^+$$

Den lodrette linje med ligningen $x = 3$ er <u>ikke</u> asymptote til grafen for f.

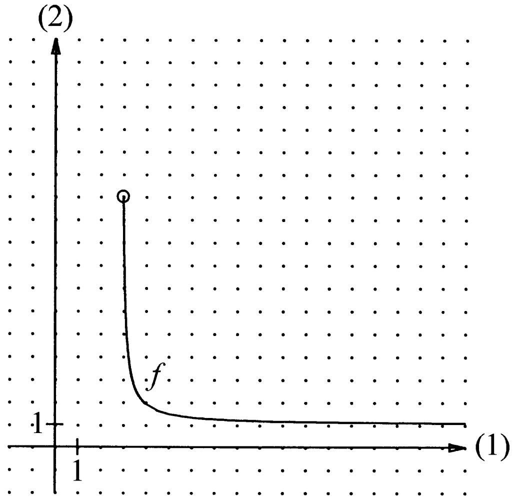
Hvis denne linje skulle være asymptote, så skulle én eller flere af følgende fire påstande gælde:

$$f(x) \to \infty \text{ for } x \to 3^+$$

$$f(x) \to -\infty \text{ for } x \to 3^+$$

$$f(x) \to \infty \text{ for } x \to 3^-$$

$$f(x) \to -\infty \text{ for } x \to 3^-$$



Figur 3: Grafen har ikke en lodret asymptote.

Asymptoter for nogle elementære funktioner

De næste fire afsnit drejer sig om hver sin type funktioner. For hver af typerne beskrives grafernes asymptotiske forløb.

Asymptoter for $\dfrac{k}{ax+b}$

Sætning 1

Lad f være en funktion af typen $f(x)=\dfrac{k}{ax+b}$, hvor $k\neq 0$ og $a\neq 0$.

- Der gælder

  $f(x)\to 0$ for $x\to\pm\infty$

  så

  linjen med ligningen $y=0$ er vandret asymptote til grafen for f.

- Hvis p er nævnerens nulpunkt, gælder

  $f(x)$ går mod ∞ eller $-\infty$ for x gående mod p fra højre og
  $f(x)$ går mod ∞ eller $-\infty$ for x gående mod p fra venstre

  så

  linjen med ligningen $x=p$ er lodret asymptote til grafen for f.

Figur 4 viser grafen for funktionen

$$f(x)=\frac{-5}{8x+24}.$$

Af første del af sætning 1 fås:

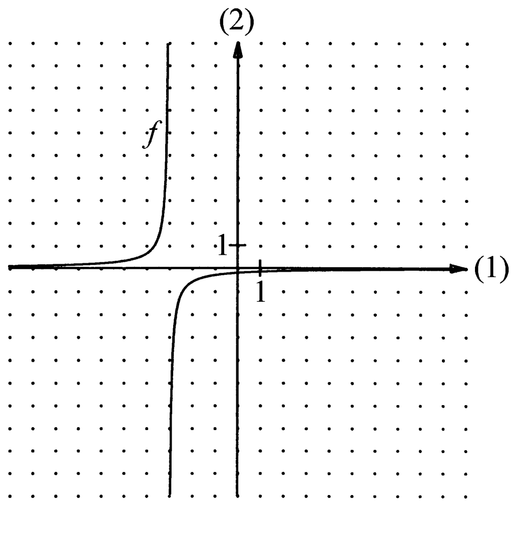
For x gående mod ∞ og for x gående mod $-\infty$ vil $f(x)$ gå mod 0.

Linjen med ligningen $y=0$ er asymptote til grafen for f.

Da nævnerens nulpunkt er -3, fås af anden del af sætning 1:

For x gående mod -3, vil $|f(x)|$ gå mod ∞.

Linjen med ligningen $x=-3$ er asymptote til grafen for f.



Figur 4

Asymptoter for eksponentialfunktioner

Sætning 2

- For en voksende eksponentialfunktion

  $f(x) = a^x = \mathrm{e}^{kx} \quad , \quad a > 1 \text{ og } k > 0$

  gælder

  $f(x) \to 0 \quad \text{for } x \to -\infty$

- For en aftagende eksponentialfunktion

  $f(x) = a^x = \mathrm{e}^{-kx} \quad , \quad 0 < a < 1 \text{ og } k > 0$

  gælder

  $f(x) \to 0 \quad \text{for } x \to \infty$

- Altså gælder for alle eksponentialfunktioner at

  linjen med ligningen $y = 0$ er vandret asymptote til grafen for f .

Forskriften for en eksponentialfunktion kan altid omskrives sådan:

$$1{,}25^x = \left(\mathrm{e}^{\ln(1{,}25)}\right)^x = \left(\mathrm{e}^{0{,}223}\right)^x = \mathrm{e}^{0{,}223x} .$$

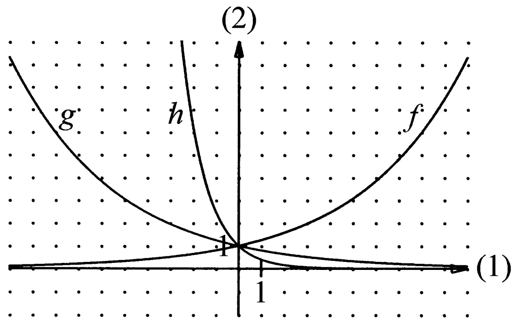
Enhver af formerne $1{,}25^x$ og $\mathrm{e}^{0{,}223x}$ forekommer ofte.

Figur 5 viser graferne for funktionerne

$$f(x) = 1{,}25^x = \mathrm{e}^{0{,}223x}$$

$$g(x) = 0{,}8^x = \mathrm{e}^{-0{,}223x}$$

$$h(x) = 0{,}4^x = \mathrm{e}^{-0{,}916x}$$



Figur 5

Af sætning 2 fås:

Den voksende eksponentialfunktion $f(x)$ går mod 0 for x gående mod $-\infty$, og de aftagende eksponentialfunktioner $g(x)$ og $h(x)$ går mod 0 for x gående mod ∞.

For alle tre funktioner gælder at

linjen med ligningen $y = 0$ er vandret asymptote til grafen.

Asymptoter for logaritmefunktioner

Sætning 3

Der gælder

$$\log x \to -\infty \quad \text{for} \quad x \to 0^+$$

$$\ln x \to -\infty \quad \text{for} \quad x \to 0^+$$

så

Linjen med ligningen $x = 0$ er lodret asymptote til grafen for $\log$.

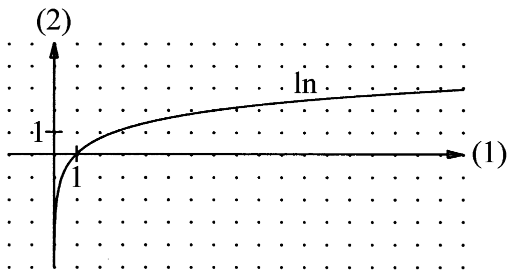
Linjen med ligningen $x = 0$ er lodret asymptote til grafen for $\ln$.

Figur 6 viser grafen for funktionen $\ln x$.

Af sætning 3 fås:

For x gående mod 0 fra højre går $\ln x$ mod $-\infty$.

Linjen med ligningen $x = 0$ er asymptote til grafen.



Figur 6

Asymptoter for potensfunktioner

Sætning 4

For en potensfunktion med negativ eksponent

(3) $\quad f(x) = x^{-a} = \dfrac{1}{x^a} \quad , \quad a > 0$

gælder

$$f(x) \to 0 \quad \text{for} \quad x \to \infty$$

$$f(x) \to \infty \quad \text{for} \quad x \to 0^+$$

så

linjen med ligningen $y = 0$ er vandret asymptote til grafen for f.

linjen med ligningen $x = 0$ er lodret asymptote til grafen for f.

Hvis a er et helt tal, er (3) også defineret for negative x. Så gælder

$$f(x) \to 0 \quad \text{for} \quad x \to -\infty$$

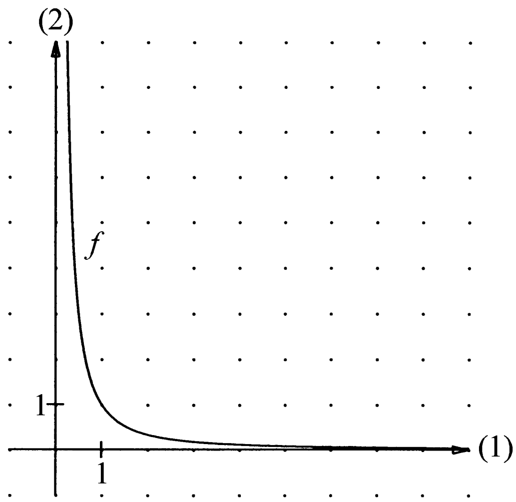
$f(x) \to \infty \quad \text{for} \quad x \to 0^-$ hvis a er lige.

$f(x) \to -\infty \quad \text{for} \quad x \to 0^-$ hvis a er ulige.

På figur 7 er vist grafen for

$$f(x) = x^{-1{,}6} = \frac{1}{x^{1.6}} .$$

Da eksponenten ikke er et helt tal, er definitionsmængden kun de positive tal.



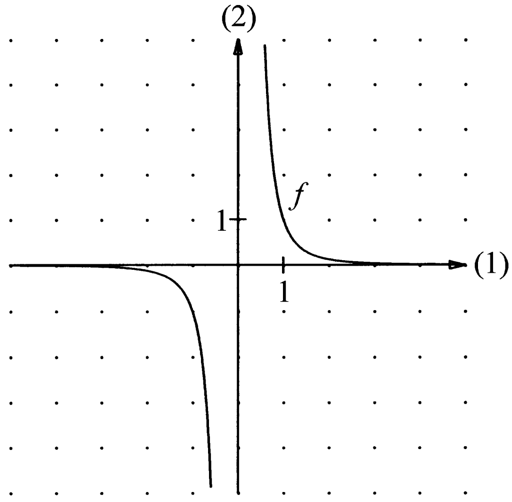
Figur 7

På figur 8 er vist grafen for

$$f(x) = x^{-3} = \frac{1}{x^3}\,.$$

Da eksponenten er ulige, gælder ifølge sætning 4 at

$$f(x) \to -\infty \quad \text{for} \quad x \to 0^-\,.$$



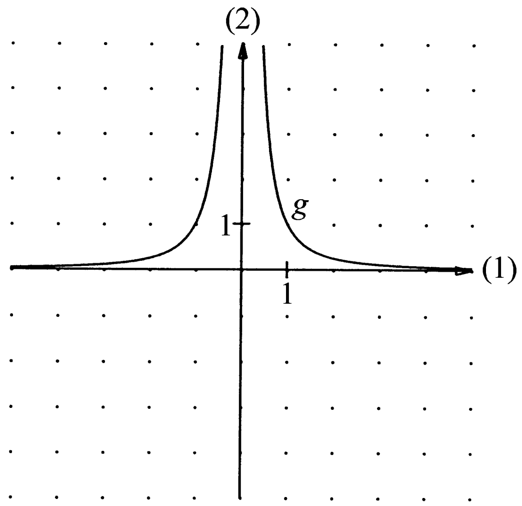
Figur 8

På figur 9 er vist grafen for

$$f(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}\,.$$

Da eksponenten er lige, gælder ifølge sætning 4 at

$$f(x) \to \infty \quad \text{for} \quad x \to 0^-\,.$$



Figur 9

Asymptoter for $k \cdot f(x)$ og for $f(x)+k$

Sætning 5

- For x gående mod ∞ eller $-\infty$ gælder at

  hvis $f(x)$ går mod 0 vil $k \cdot f(x)$ gå mod 0 ,

  så hvis linjen med ligningen $y=0$ er asymptote til grafen for f , så er den også asymptote til grafen for $k \cdot f$.

- For x gående mod et tal p fra højre eller fra venstre gælder at

  hvis $f(x)$ går mod ∞ eller $-\infty$

  vil $k \cdot f(x)$ gå mod ∞ eller $-\infty$

  så hvis linjen med ligningen $x=p$ er asymptote til grafen for f , så er den også asymptote til grafen for $k \cdot f$.

På figur 10 er vist grafen for en funktion f , hvor

$$f(x) \to 0 \text{ for } x \to \infty$$

og

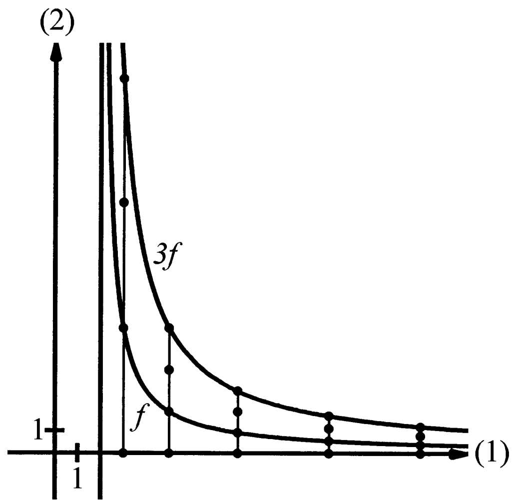
$$f(x) \to \infty \text{ for } x \to 2^+ .$$

Desuden er vist grafen for funktionen $3 \cdot f$. Af sætning 5 følger at

$$3 \cdot f(x) \to 0 \text{ for } x \to \infty$$

og

$$3 \cdot f(x) \to \infty \text{ for } x \to 2^+ .$$



Figur 10

Sætning 6

- For x gående mod ∞ eller $-\infty$ gælder at

  hvis $f(x)$ går mod 0 vil $f(x)+k$ gå mod k ,

  så hvis linjen med ligningen $y=0$ er asymptote til grafen for f , så er linjen med ligningen $y=k$ er asymptote til grafen for $f(x)+k$.

- For x gående mod et tal p fra højre eller fra venstre gælder at

  hvis $f(x)$ går mod ∞ eller $-\infty$

  vil $f(x)+k$ gå mod ∞ eller $-\infty$

  så hvis linjen med ligningen $x=p$ er asymptote til grafen for f , så er den også asymptote til grafen for $f(x)+k$.

På figur 11 er vist grafen for en funktion f , hvor

$$f(x) \to 0 \text{ for } x \to \infty$$

og

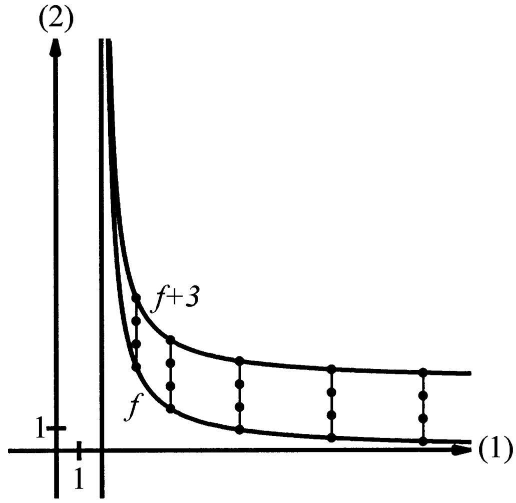
$$f(x) \to \infty \text{ for } x \to 2^+ .$$

Desuden er vist grafen for funktionen $f+3$. Af sætning 6 følger at

$$f(x)+3 \to 3 \text{ for } x \to \infty$$

og

$$f(x)+3 \to \infty \text{ for } x \to 2^+ .$$



Figur 11

Eksempler på løsning af opgaver om asymptoter

<u>Opgave 1:</u>

Bestem en ligning for den vandrette asymptote til grafen for funktionen f når $f(x) = 1{,}4^x - 2$.

<u>Besvarelse:</u>

Da

$1{,}4^x$ er på formen a^x ,

gælder at

grafen for $1{,}4^x$ har asymptoten $y = 0$,

så da

$f(x)$ fremkommer ved at trække 2 fra $1{,}4^x$,

fås:

<u>Linjen med ligningen $y = -2$ er asymptote til grafen for f</u> .

<u>Opgave 2:</u>

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{1}{x-2} + 1 .$$

Bestem en ligning for hver af asymptoterne til grafen for f .

<u>Besvarelse:</u>

Da

$\dfrac{1}{x-2}$ er på formen $\dfrac{k}{ax+b}$ og nævnerens nulpunkt er 2,

gælder at

grafen for $\dfrac{1}{x-2}$ har asymptoterne $y = 0$ og $x = 2$.

Da det desuden gælder at

$f(x)$ fås ved at lægge 1 til $\dfrac{1}{x-2}$,

kan sluttes at

<u>linjerne med ligningerne $y = 1$ og $x = 2$ er asymptoter til grafen for f</u> .

Opgave 3:

En funktion f er bestemt ved

$$f(t) = 23 + 74 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}12 \cdot t} \quad , \quad t \geqq 0 \,.$$

Bestem en ligning for asymptoten til grafen for f, og skitsér grafen for f.

Besvarelse:

Da

$$\mathrm{e}^{-0{,}12 \cdot t} \to 0 \ \text{ for } \ t \to \infty$$

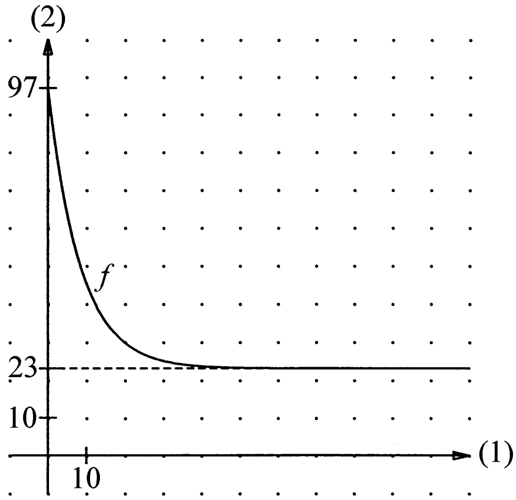
vil

$$f(t) \to 23 \ \text{ for } \ t \to \infty \ .$$

så

$$\underline{\underline{\text{linjen med ligningen } \ y = 23 \ \text{ er asymptote til grafen for } f}} \ .$$

Grafen for f er skitseret på figur 13.



Figur 13

Opgave 4 (A-niveau):

En funktion f er bestemt ved $f(x) = \dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{-x}}$.

Bestem $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

Besvarelse:

Da $\quad \mathrm{e}^{-x} \to 0 \ \text{ for } \ x \to \infty \quad$ og $\quad \dfrac{2}{1+z} \to 2 \ \text{ for } \ z \to 0$,

er $\quad \underline{\underline{\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 2}}$.

Præcisering

Lad f være funktionen bestemt ved

$$f(x) = \frac{1}{x} \; .$$

Vi vil nu præcisere hvad man mener når man kommer med en påstand som fx

(4) $\quad f(x) \to 0$ for $x \to \infty$.

Med den sprogbrug der blev benyttet i begyndelsen af disse noter, kan man forklare hvad der menes med (4), ved at sige

> Det er muligt at få funktionsværdierne så tæt det skal være på 0
> ved at vælge x tilstrækkelig stor.

I det følgende vil vi præcisere hvordan dette skal forstås.

Vi kan finde et tal x hvis funktionsværdi $\frac{1}{x}$ er mindre $0{,}0017$. Vi kan fx bruge tallet $x = 1000$. Så er funktionsværdien nemlig $\frac{1}{1000} = 0{,}001$.

Det ses at uanset hvor lille et tal ε vi vælger i stedet for $0{,}0017$, så kan vi altid finde et tal x hvis funktionsværdi $\frac{1}{x}$ er mindre end ε. Men dette er ikke nok til at (4) er opfyldt – der kræves noget mere. Det er altså ikke nok at vi til ethvert lille positivt tal ε kan finde et positivt tal x hvis funktionsværdi $\frac{1}{x}$ er mindre end ε.

For at (4) er opfyldt, skal følgende gælde:

(5)
> For ethvert positivt tal ε findes et tal k så der gælder:
>
> For alle tal x større end k er funktionsværdien $\frac{1}{x}$ mindre end ε.

Vi vil nu bevise at (5) gælder:

Lad ε være et vilkårligt positivt tal. Vi vil vise at tallet $\frac{1}{\varepsilon}$ kan bruges som k. Vi skal altså vise at

$$\text{hvis} \quad x > \frac{1}{\varepsilon} \;, \quad \text{så er} \quad \varepsilon > \frac{1}{x} \; .$$

Men dette gælder da den anden ulighed fås når man i første ulighed ganger begge sider med det positive tal $\frac{\varepsilon}{x}$.