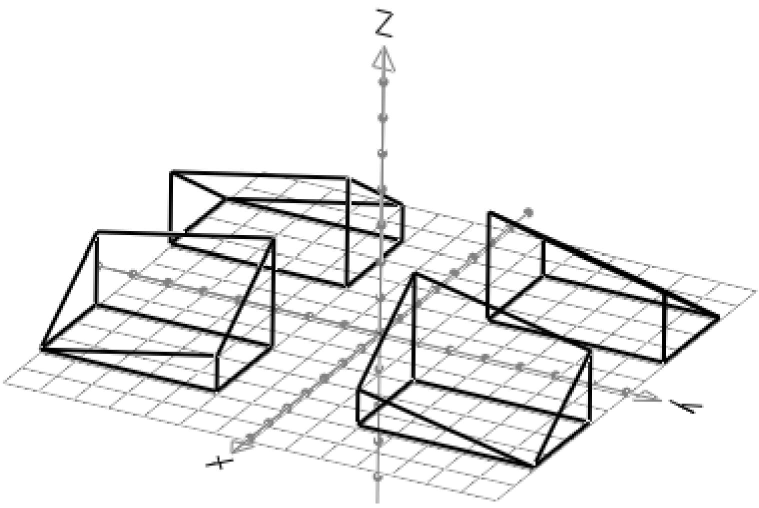
3D-grafik



2005 Karsten Juul

Når der i disse noter står at du skal få tegnet en figur, så er det meningen at du skal få tegnet den ved at taste tildelinger i Mathcad-dokumentet **RumFig2**. Det er selvfølgelig tilladt at lave tilføjelser med blyant, fx betegnelser og hjælpelinjer.

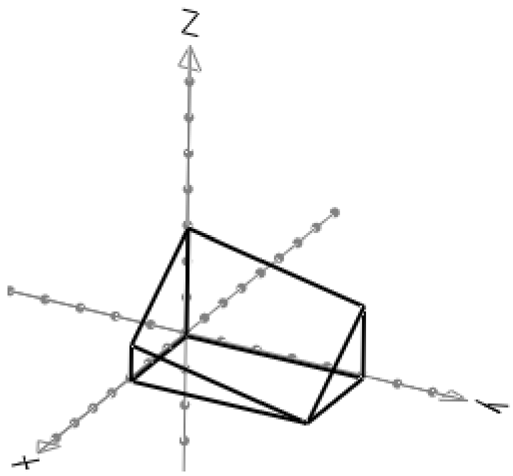
Opgave 1

Få tegnet den klods der er vist på figur 1, ved at taste en tildeling af typen

(1) $$M := \begin{pmatrix} 0 & 3 & & & & 0 \\ 0 & 0 & - & - & - & 0 \\ 0 & 0 & & & & 3 \end{pmatrix}$$

hvor **matricens søjler er punkter skrevet i den rækkefølge hvor de skal forbindes**. Det kan ikke undgås at nogle af siderne bliver tegnet to gange. Du må selv bestemme hvilket punkt du starter med.

Mathcad: *For at skrive en matriks skal du taste Ctrl+m eller vælge matriks på matriks-paletten.*



Figur 1

I det følgende skal du flytte og strække figuren ved at ændre tallene i M.

Mathcad: *Indeks (dvs.* $_{0,1}$*) skal skrives ved at taste [, (dvs. Ctrl+Alt+8) eller ved at vælge indeks på matriks-paletten.*

Opgave 2

For at kunne ændre alle punkter, dvs. alle søjler, på én gang, skal du skrive at variablen j skal gennemløbe alle søjlenumre. Dette kan gøres ved efter eller under M at skrive:

$$j := 0 .. \operatorname{cols}(M) - 1$$

Mathcad: *Osv.-prikkerne (dvs. ..) skal skrives ved at taste et semikolon (dvs. tegnet* ; *).*

De tildelinger indeholdene j som du herefter skriver, vil blive udført for hver værdi af variablen j.

Få lagt 2 til alle punkternes y-koordinater ved at skrive

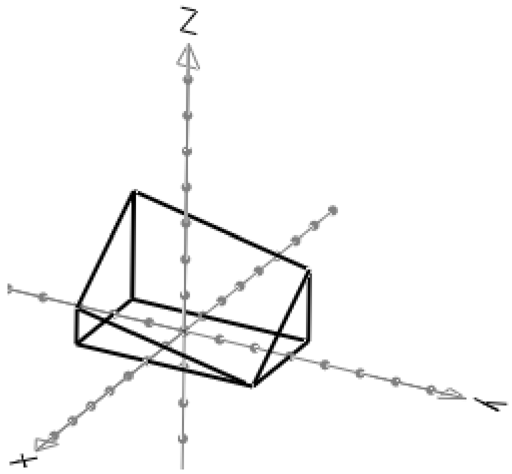
(2) $$M_{1,j} := M_{1,j} + 2$$

Hvad sker der med klodsen når der lægges 2 til alle punkternes y-koordinater?

Opgave 3

Klodsen på figur 1 skal nu flyttes så den kommer til at stå som vist på figur 2. Hvad skal der gøres ved hvert punkts koordinatsæt for at opnå dette?

Få klodsen flyttet ved at taste tildelinger der minder om (2).

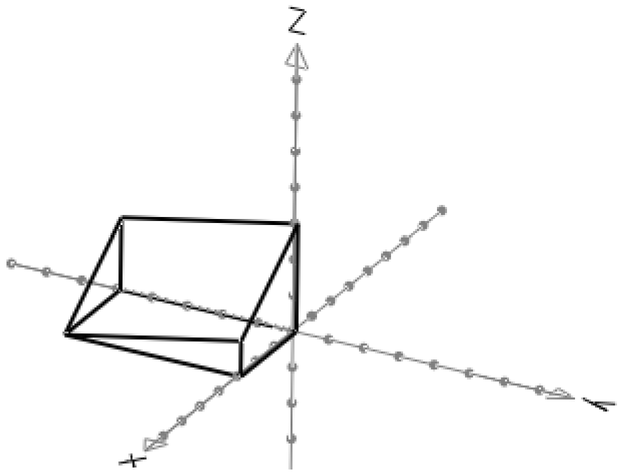


Figur 2

Opgave 4

Klodsen på figur 3 kan man få frem ved at starte med klodsen på figur 1 og herefter udføre én bestemt operation på alle punkternes koordinater. Hvad er det man kan gøre ved alle punkternes koordinatsæt så figuren fremkommer?

Tast en tildeling der minder om (2), som udfører dette.



Figur 3

Opgave 5

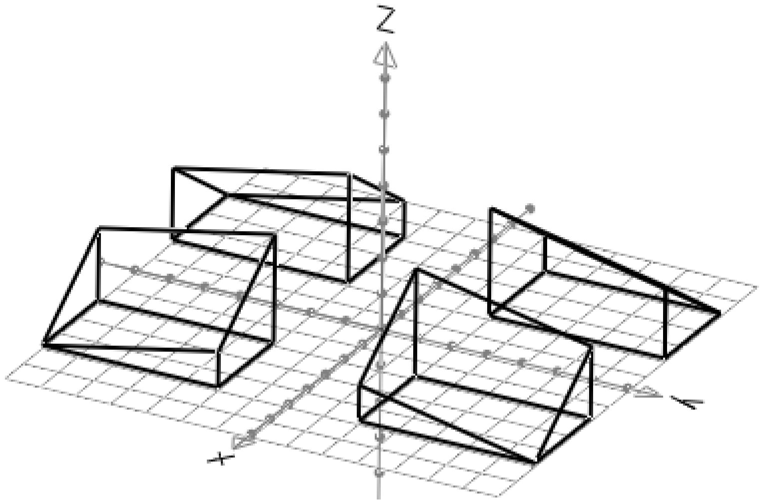
Tast følgende for at få i alt fire eksemplarer af figuren:

$$G := M \qquad H := M \qquad N := M$$

Foreløbig ligger disse oven i hinanden, så det ser ud som om der kun er én figur.

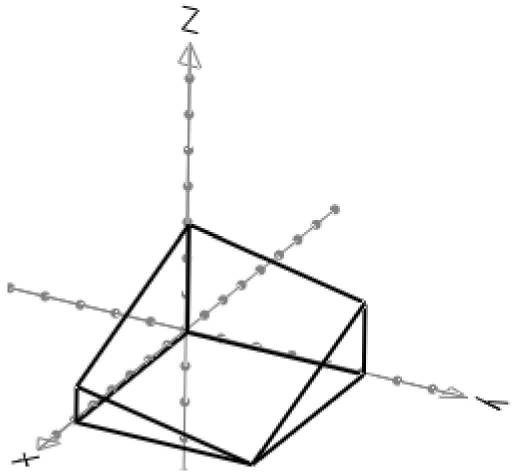
RumFig2: *Der er syv trådfigurer D, E, F, G, H, M og N. Man får tegnet en trådfigur ved at sætte en af disse bogstaver lig en matriks hvis søjler er de punkter som skal forbindes, sådan som det er gjort i (1) ovenfor.*

Få figur 4 frem ved at bruge metoderne fra de foregående opgaver til at ændre G, H, M og N. (Hvis du vil tegne kvadratnettet i xy-planen, så tast $\alpha := (0\ \ 0\ \ 1\ \ 0)$ hvor bogstavet alfa kan skrives ved at taste bogstavet a efterfulgt af ctrl+g. "Gulvet" kan gøres delvist gennemsigtigt ved at dobbeltklikke på figuren og vælge Advanced og Plot 14, og sætte Transparency til fx 30 %).



Figur 4

Opgave 6



Figur 5

Figur 1 kan ændres til figur 5 ved at foretage samme ændring af alle punkternes koordinatsæt. Hvad er det man kan gøre ved alle punkternes koordinatsæt så figuren fremkommer?

Tast en tildeling der minder om (2) og som udfører dette.

Definition 1. **Parallelforskydning**

En "parallelforskydning med en vektor $\vec{h}$" fører ethvert punkt P over i et punkt Q som er bestemt ved at

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{h} \,.$$

Sætning 1. **Koordinatformel for parallelforskydning**

Ved en parallelforskydning med en vektor $\vec{h} = \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix}$ føres et punkt $P(x, y, z)$ over i et punkt $Q(u, v, w)$ hvis koordinater kan udregnes sådan:

$$u = x + r$$

$$v = y + s$$

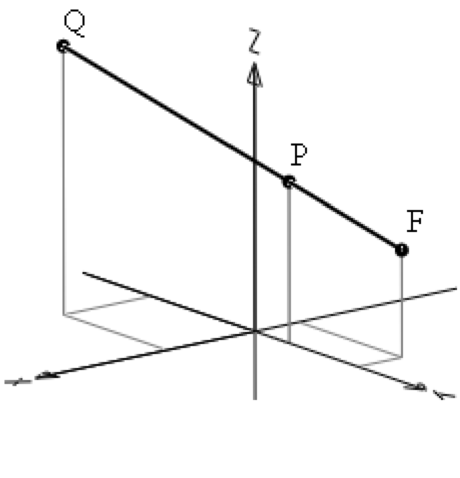
$$w = z + t \,.$$

Bevis **for sætning 1**

At P føres over i Q ved parallelforskydning med vektoren $\vec{h}$, betyder at $\overrightarrow{PQ} = \vec{h}$.
Heraf fås at

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OP} + \vec{h} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+r \\ y+s \\ z+t \end{pmatrix}.$$

Opgave 7



Figur 6

a) På figur 6 er vist punkterne $F(-1, 3, 2)$, $P(0, 1, 3)$ og Q hvor Q er fastlagt ved at

$$\overrightarrow{FQ} = 3 \cdot \overrightarrow{FP} .$$

Bestem koordinatsættet til $\overrightarrow{FP}$, til $\overrightarrow{FQ}$ og til Q.

b) På figur 6 er vist punkterne $F(-1, 3, 2)$, $P(x, y, z)$ og Q hvor Q er fastlagt ved at

$$\overrightarrow{FQ} = 3 \cdot \overrightarrow{FP} .$$

Bestem udtrykt ved x, y og z koordinatsættet til Q.

c) Vi holder fast i punktet F så det ikke kan flytte sig, og lader rummet vokse så alle afstande bliver tre gange så store som de oprindelig var. Så gælder for hvert punkt P i rummet at P føres over i et punkt Q som er fastlagt ved ligningen i spørgsmål b.

Når rummet forstørres på denne måde, føres klodsen M der er vist på figur 1, over i en klods N.

Få tegnet M og N i samme koordinatsystem.

Opgave 8

Du skal nu tegne en ny klods M der har en sådan form at den egner sig til at stable.

Derefter skal du benytte metoden fra opgave 7 til frembringe flere klodser der alle har samme form som M, men har forskellige størrelser.

Brug til sidst metoden fra sætning 1 til at stable klodserne.

Definition 2. Multiplikation ud fra punkt

En "multiplikation med et tal k ud fra et punkt F" fører ethvert punkt P over i et punkt Q som er bestemt ved at

$$\overrightarrow{FQ} = k \cdot \overrightarrow{FP} .$$

Sætning 2. Koordinatformel for multiplikation ud fra punkt

Ved en multiplikation med et tal k ud fra et punkt $F(a, b, c)$ føres et punkt $P(x, y, z)$ over i et punkt $Q(u, v, w)$ hvis koordinater kan udregnes sådan:

$$u = a + k \cdot (x - a)$$

$$v = b + k \cdot (y - b)$$

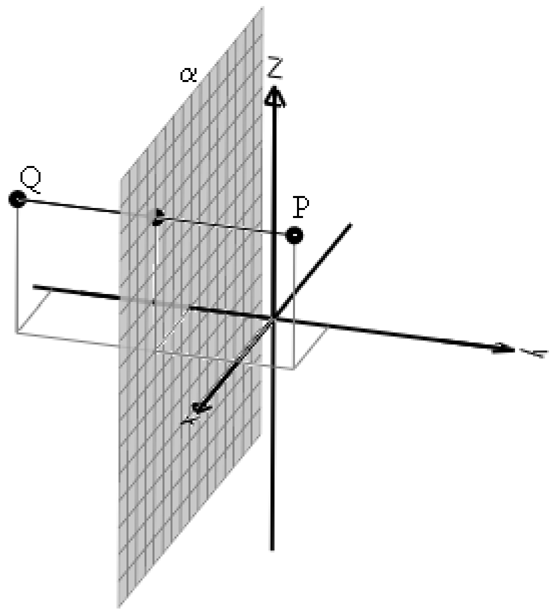
$$w = c + k \cdot (z - c) .$$

Bevis for sætning 2

At P føres over i Q ved multiplikation med et tal k ud fra et punkt F , betyder at $\overrightarrow{FQ} = k\cdot\overrightarrow{FP}$. Heraf fås at

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FQ} = \overrightarrow{OF} + k\cdot\overrightarrow{FP} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + k\cdot\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+k(x-a) \\ b+k(y-b) \\ c+k(z-c) \end{pmatrix}.$$

Opgave 9



Figur 7

Figuren viser punktet $\mathrm{P}(4,2,5)$ og dets spejlbillede Q i planen α med ligningen $y=-3$. (Dette har ikke noget at gøre med sætning 2).

a) Få tegnet figuren.

b) Bestem udtrykt ved x, y og z koordinatsættet til spejlbilledet af et punkt $\mathrm{P}(x,y,z)$ i planen α .

c) Brug resultatet i spørgsmål b til at få tegnet spejlbilledet af klodsen M fra figur 1. Billedet skal også vise M og α .

Opgave 10

a) Start på et nyt RumFig2-dokument, og sæt $\max := 4$. Få tegnet første basisvektor $\vec{i}$ ved at taste

$$a := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Venstre søjle i matricen er det punkt vektoren afsættes ud fra, og højre søjle er vektoren.

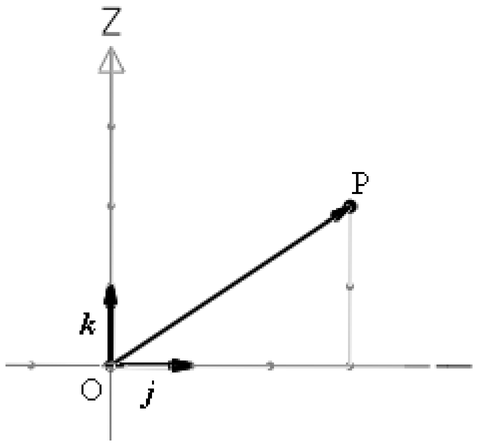
__RumFig2__: Der er syv vektorer a, b, c, d, p, q og r. Man får tegnet en vektor ved at sætte en af disse bogstaver lig en matriks med to søjler hvor den venstre søjle er koordinatsættet til det punkt vektoren skal afsættes ud fra, og den højre søjle er vektorens koordinatsæt (ikke endepunktets koordinatsæt).

b) Få på tilsvarende måde tegnet de to andre basisvektorer.

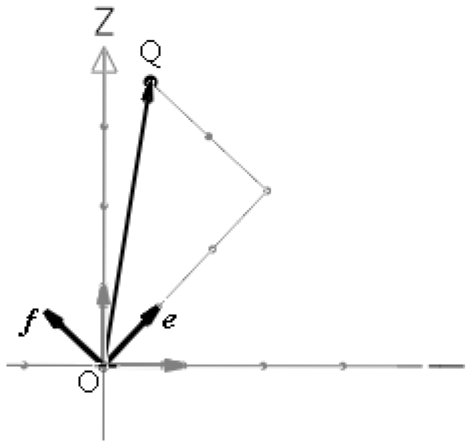
c) Drej koordinatsystemet så x-aksen peger vinkelret ud fra skærmen.

Nu ser koordinatsystemet ud som på figur 8. Punktet P på figur 8 har koordinatsættet $(0,3,2)$. Da P har dette koordinatsæt, gælder at

$$\overrightarrow{OP} = 3\cdot\vec{j} + 2\cdot\vec{k}\,.$$



Figur 8



Figur 9

På figur 9 er vist vektorerne $\vec{e}$, $\vec{f}$ og $\overrightarrow{OQ}$ som er fremkommet af vektorerne $\vec{j}$, $\vec{k}$ og $\overrightarrow{OP}$ ved at dreje rummet en vinkel v om x-aksen. Det ses at der må gælde

$$\overrightarrow{OQ} = 3\cdot\vec{e} + 2\cdot\vec{f}\,.$$

Ved hjælp af enhedscirklen ses at

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(v+90°) \\ \sin(v+90°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(v) \\ \cos(v) \end{pmatrix}.$$

Altså er

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3\cos(v) - 2\sin(v) \\ 3\sin(v) + 2\cos(v) \end{pmatrix}.$$

Når rummet drejes vinklen v om x-aksen, føres punktet $P(0,3,2)$ altså over i punktet $Q\big(0\,,\ 3\cos(v){-}2\sin(v)\,,\ 3\sin(v){+}2\cos(v)\big)$.

d) Få tegnet punktet P ved at taste $P := (0\ \ 3\ \ 2)$ hvor højre side af tildelingen er en matriks.

Rumfig 2: *Når man bruger et af bogstaverne P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y og Z til at tegne et punkt, så vil der automatisk blive tegnet et stativ som tydeliggør hvor punktet befinder sig. Man får tegnet et punkt med stativ ved at sætte et af disse bogstaver lig en* 1×3 *matriks som indeholder punktets koordinater.*

e) Få tegnet Q ved at taste

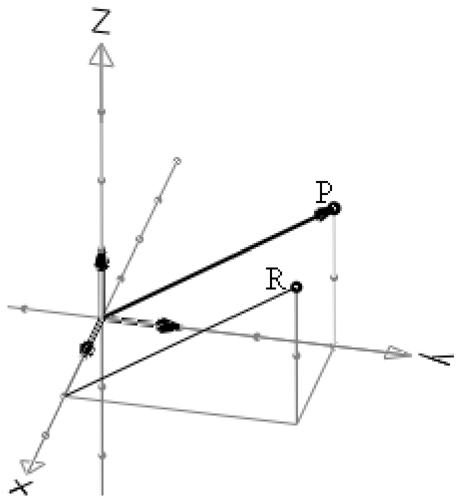
$$v := 47\,\text{deg}$$

$$Q := \begin{pmatrix} 0 & 3\cos(v)-2\sin(v) & 3\sin(v)+2\cos(v) \end{pmatrix}$$

f) Prøv at erstatte højresiden af ligningen $v := 47\,\text{deg}$ med andre vinkler end $47°$.

Opgave 11

Når vi siger at vi drejer rummet vinklen $47°$ om x-aksen, så er det underforstået at drejningen foregår i den retning som fremgår ved at sammenligne figurerne 8 og 9, dvs. at drejningen ses at være mod uret når vi ser fra spidsen af x-aksen ind mod begyndelsespunktet. Hvis vinklen er negativ, foregår drejningen mod uret.



Figur 10

På figur 10 er vist det punkt P der er omtalt i opgave 10, samt et nyt punkt R.

a) Hvad er koordinatsættet for R?

Ved en drejning på $47°$ om x-aksen føres P over i det punktet Q som er vist på figur 9. Ved denne drejning føres R over i et punkt S.

b) Hvad er x-koordinaten for S?

c) Er y-koordinaten for S større end, lig med eller mindre end y-koordinaten for Q?

d) Er z-koordinaten for S større end, lig med eller mindre end z-koordinaten for Q?

e) Lav et billede der viser punkterne P, Q, R og S.

f) Drej dette billede og se det fra forskellige sider så du får overblik over det.

g) Når rummet drejes vinklen v om x-aksen, føres punktet $T(x, y, z)$ over i et punkt U. Hvad er koordinatsættet til U ?

Opgave 12

Du skal nu dreje klodsen fra figur 1 en vinkel v om x-aksen. For hvert søjlenummer j gælder at punktet P i søjle nr. j i matricen M føres over i et punkt Q hvorom der gælder:

Q's y-koordinat er tallet $M_{1,j} \cdot \cos(v) - M_{2,j} \cdot \sin(v)$ og

Q's z-koordinat er tallet $M_{1,j} \cdot \sin(v) + M_{2,j} \cdot \cos(v)$

hvor $M_{1,j}$ og $M_{2,j}$ jo er hhv. y- og z-koordinat for P.

Udnyt disse bemærkninger til at få tegnet den drejede klods.

Definition 3. Drejning om koordinatakse

Når rummet drejes om en af koordinatakserne, så angiver et positivt gradtal en drejning der ses at være mod uret når man ser fra aksens spids ind mod begyndelsespunktet. Et negativt gradtal angiver en drejning i den modsatte retning.

Sætning 3. Koordinatformel for drejning om x-aksen

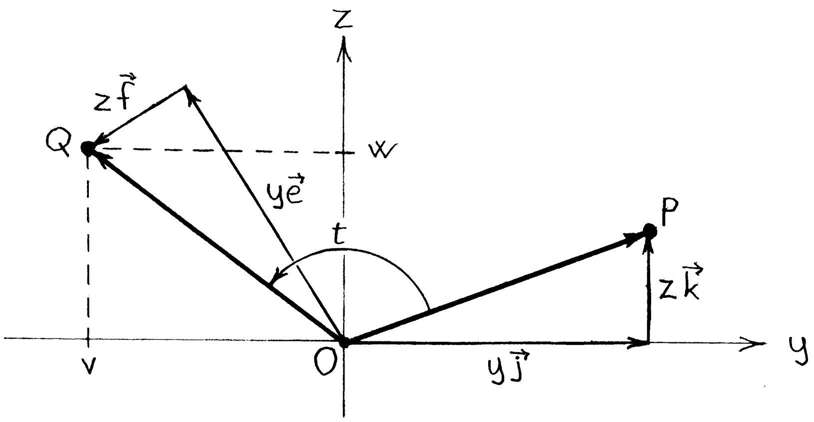
Når rummet drejes en vinkel t om x-aksen, så føres et punkt $P(x,y,z)$ over i et punkt $Q(u,v,w)$ hvis koordinater kan udregnes sådan:

$$u = x$$

$$v = y \cdot \cos(t) - z \cdot \sin(t)$$

$$w = y \cdot \sin(t) + z \cdot \cos(t).$$

Bevis for sætning 3



Figur 11

Ved en drejning om x-aksen er det klart at hvis $P(0,y,z)$ føres over i $Q(0,v,w)$, så vil $P(x,y,z)$ føres over i $Q(u,v,w)$ hvor $u = x$

På figuren er vist punktet $P(0,y,z)$ og det punkt $Q(0,v,w)$ som P føres over i når rummet drejes vinklen t om x-aksen.

Ved denne drejning føres vektorerne $\vec{j}$ og $\vec{k}$ over i hhv.

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t+90°) \\ \sin(t+90°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Da

$$\overrightarrow{OP} = y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$$

er

$$\overrightarrow{OQ} = y \cdot \vec{e} + z \cdot \vec{f}\ .$$

Derfor er

$$\begin{pmatrix} 0 \\ v \\ w \end{pmatrix} = y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \cdot \cos(t) - z \cdot \sin(t) \\ y \cdot \sin(t) + z \cdot \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Sætning 4. **Koordinatformel for drejning om y-aksen**

Når rummet drejes en vinkel t om y-aksen, så føres et punkt $P(x, y, z)$ over i et punkt $Q(u, v, w)$ hvis koordinater kan udregnes sådan:

$$u = x \cdot \cos(t) + z \cdot \sin(t)$$

$$v = y$$

$$w = -x \cdot \sin(t) + z \cdot \cos(t)\ .$$

Sætning 5. **Koordinatformel for drejning om z-aksen**

Når rummet drejes en vinkel t om z-aksen, så føres et punkt $P(x, y, z)$ over i et punkt $Q(u, v, w)$ hvis koordinater kan udregnes sådan:

$$u = x \cdot \cos(t) - y \cdot \sin(t)$$

$$v = x \cdot \sin(t) + y \cdot \cos(t)$$

$$w = z\ .$$

Opgave 13

Få tegnet en figur der i et koordinatsystem viser

1) Linjen m gennem $\mathrm{O}(0,0,0)$ og $\mathrm{R}(1,1,0)$.

2) Linjestykket med endepunkter $\mathrm{A}(6,2,0)$ og $\mathrm{B}(2,6,0)$.

3) Brug reglerne i teoriafsnittet på denne og foregående side til på samme figur at få tegnet det linjestykke CD som AB føres over i hvis figuren bestående af m og AB
   - først drejes om z-aksen så m føres over i x-aksen,
   - så drejes $30°$ om x-aksen,
   - og til sidst drejes om z-aksen så m kommer tilbage hvor den startede.

Det er ikke nødvendigt at bruge tre drejninger for at føre AB over i CD. Det er nok med én drejning. Hvad er det for en drejning? Hvorfor er der fornuft i at frembringe CD på den måde som er angivet i 3) ?

En linje n går gennem punkterne $O(0,0,0)$ og $T(0,2,1)$. Rummet drejes $40°$ om n i den retning som er mod uret når man ser fra T mod O. Herved føres en givet figur M over i en figur N. Hvilke tre drejninger kunne du bruge for at få tegnet N?

Opgave 14

Mathcad: *Når man ganger matricer i Mathcad, så taster man * for at skrive gangeprikken ligesom når man ganger tal.*

Ved hjælp af Mathcad fås

$$\begin{pmatrix} 9 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 3 \\ 5 & 8 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 57 \\ 29 \\ 38 \end{pmatrix}.$$

Lad os kalde de tre matricer **A**, **B** og **C**:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C} \ .$$

Tallet i **C**'s 1. række fås ved at gange **A**'s 1. række med søjlen **B**:

(1) $\quad 9\cdot 2 + 7\cdot 1 + 8\cdot 4 \ = \ 57$.

Tallet i **C**'s 2. række fås ved at gang **A**'s 2. række med søjlen **B**:

(2) $\quad 6\cdot 2 + 5\cdot 1 + 3\cdot 4 \ = \ 29$

Tallet i **C**'s 3. række fås ved at gange **A**'s 3. række med søjlen **B**.

Skriv en udregning som (1) og (2) der viser hvordan tallet 38 i **C**'s 3. række udregnes ud fra tallene i **A** og **B**.

Opgave 15

Ved hjælp af Mathcad fås

$$\begin{pmatrix} 9 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 3 \\ 5 & 8 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 57 & 81 & 40 \\ 29 & 43 & 20 \\ 38 & 56 & 28 \end{pmatrix}.$$

Lad os kalde de tre matricer **A**, **D** og **E**:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{E} \ .$$

I opgave 14 er vist hvordan en matriks ganges med en søjle.

– **E**'s 1. søjle fås ved at gange **A** med **D**'s 1. søjle .

– **E**'s 2. søjle fås ved at gange **A** med **D**'s 2. søjle .

– **E**'s 3. søjle fås ved at gange **A** med **D**'s 3. søjle .

Skriv udregninger som (1) og (2) i opgave 14 der viser hvordan tallene i **E**'s 2. søjle udregnes ud fra tallene i **A** og **D**.

Skriv en tilsvarende udregning der viser hvordan man udregner tallet i **E**'s 3. række og 3. søjle.

Definition 4 **Gangning af matricer**

Man kan kun udregne $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ hvis ***A***'s søjleantal er lig ***B***'s rækkeantal. Hvis dette er tilfældet, er matricen $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ den matrix hvorom der gælder at

- ***C*** har lige så mange rækker som ***A*** og lige så mange søjler som ***B***.
- Tallet i ***C***'s *i*'te række og *j*'te søjle fås ved at gange ***A***'s *i*'te række med ***B***'s *j*'te søjle.

Man ganger en række $\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ med en søjle $\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ ved at udregne $a \cdot p + b \cdot q + c \cdot r$.

Opgave 16

I opgave 4 spejlede du en figur i xz-planen. Ved denne spejling føres et punkt $P(x, y, z)$ over i et punkt $Q(u, v, w)$ hvis koordinater fås ved hjælp af følgende formler:

$$u = x$$

$$v = -y$$

$$w = z$$

Hvis vi ganger $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ med $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ fra venstre, får vi

$$\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \\ z \end{pmatrix}$$

dvs. vi får koordinaterne til det punkt som $P(x, y, z)$ føres over i ved en spejling i xz-planen.

Den figur som i opgave 4 skulle spejles, var tastet som en matrix **M** hvor søjlerne var de punkter der skulle forbindes for at tegne figuren. Vi kan få tegnet spejlbilledet ved at lave en matrix **N** hvor det for hvert søjlenummer j gælder **N**'s søjle nr. j fås ved at gange **M**'s søjle nr. j med **A** fra venstre.

Mathcad: *I Mathcad kan dette gøres ved at taste*

$$j := 0 .. cols(M)-1$$

$$N^{<j>} := A \cdot M^{<j>}$$

hvor $N^{<j>}$ *betyder søjle nr.* j . *Symbolet* $^{< >}$ *kan vælges på matriks-paletten.*

I opgave 6 strakte vi en figur i retningen vinkelret på yz-planen så alle afstande i denne retning blev fordoblet. Ved denne strækning føres et punkt $P(x, y, z)$ over i et punkt $Q(u, v, w)$ hvis koordinater fås ved hjælp af følgende formler:

$$u = 2 \cdot x$$
$$v = y$$
$$w = z$$

Ligesom ved spejlingen kan vi få Q's koordinater ved at gange $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ fra venstre med en matrix. Angiv sådan en matriks **B**.

Opgave 17

Af sætning 3 fås at ved en drejning på $27°$ om x-aksen vil et punkt $P(x, y, z)$ føres over i et punkt $Q(u, v, w)$ hvis koordinater kan udregnes sådan:

$$u = x$$
$$v = 0.8910\,y - 0.4540\,z$$
$$w = 0.4540\,y + 0.8910\,z\,.$$

Opskriv den matrix som man skal gange $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ med fra venstre for at få Q's koordinater.

Find også den matrix som svarer til en drejning på $15°$ om z-aksen.

Opgave 18

I opgave 13 foretog vi tre drejninger af rummet efter hinanden. Lad **A** være matricen svarende til første drejning, **B** matricen svarende til anden drejning og **C** matricen svarende til 3. drejning.

Ved at udføre de tre drejninger efter hinanden føres et punkt $P(x, y, z)$ over i et punkt $Q(u, v, w)$ hvis koordinater kan udregnes sådan:

Først ganges $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ med **A** fra venstre, så ganges resultatet med **B** fra venstre, og dette andet resultat ganges med **C** fra venstre.

Der gælder altså

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \mathbf{C} \cdot \left(\mathbf{B} \cdot \left(\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) \right).$$

I Mathcad skal du nu opskrive matricerne svarende til de tre drejninger og sætte **A**, **B** og **C** lig disse matricer. Få så Mathcad til at udregne (reducere) højresiden i ovenstående ligning ved at udnytte følgende oplysning:

Mathcad: *For at få et udtryk udregnet symbolsk (reduceret) kan man anbringe markøren i udtrykket og vælge → på symbolsk-paletten (- paletten).*

Udregn også matricen $\mathbf{D} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, og udregn derefter

$$\mathbf{D} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \\ \mathrm{z} \end{pmatrix}.$$

Hvad ser man?

Matricen **D** svarer til en drejning af rummet om en linje. Hvad er det for en linje?

Sætning 6

For matricer $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ og $\boldsymbol{C}$ gælder at

$$(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C})$$

hvis matricernes søjleantal og rækkeantal er sådan at gangningerne kan udføres.

Bevis for sætning 6: springes over.

Definition 5 **Transformation**

Vi har omdannet figurer ved at forskyde, dreje, spejle og strække rummet. Man kan også omforme rummet på mere indviklede måder.

Som fællesbetegnelse for alle omformninger bruges ordet *transformation*.

Når man taler om *transformationen svarende til en matrix* $\boldsymbol{A}$, mener man den transformation der fører ethvert punkt $P(x, y, z)$ over i et punkt $Q(u, v, w)$ hvis koordinater kan udregnes sådan:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Sætning 7

Når vi først udfører en transformation der svarer til en matrix $\boldsymbol{A}$, og derefter en transformation der svarer til en matrix $\boldsymbol{B}$, så har vi i alt udført en transformation som svarer til matricen $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$.

Bevis for sætning 7

Transformationen svarende til $\boldsymbol{A}$ fører et punkt $P(x, y, z)$ over i et punkt med koordinatsættet

$$\boldsymbol{A}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} ,$$

og punktet med dette koordinatsæt føres ved transformationen svarende til ***B*** over i et punkt med koordinatsættet

$$\boldsymbol{B}\cdot\left(\boldsymbol{A}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) .$$

Ifølge sætning 6 er dette lig

$$(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A})\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \boldsymbol{C}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} ,$$

dvs. i alt er udført en transformation svarende til matricen ***C***.

Opgave 19

En transformation af rummet fremkommer ved først at dreje $50°$ om y-aksen og derefter spejle i xz-planen.

Benyt sætning 7 til at bestemme den tilhørende matrix.

Fremstil et billede der viser en eller anden figur M samt den figur N som M føres over i ved den nævnte transformation.

Opgave 20

For også at kunne parallelforskyde ved at gange med en matrix, vil vi i vores regninger bruge matricer

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\1\end{pmatrix}$$

hvor der efter punktets koordinater er tilføjet et ekstra éttal.

Vi plejer at fastlægge en figur med en matrix

$$M := \begin{pmatrix}2 & 3 & & 2\\1 & 3 & --- & 9\\8 & 5 & & 5\end{pmatrix}$$

hvor søjlerne er punkterne der skal forbindes.

Før vi transformerer vil vi tilføje éttaller:

$$M := \begin{pmatrix} 2 & 3 & & 2 \\ 1 & 3 & --- & 9 \\ 8 & 5 & & 5 \\ 1 & 1 & & 1 \end{pmatrix} .$$

Efter at vi har transformeret, vil vi fjerne éttallerne igen.

Vi vil bruge en regneoperation til at tilføje og fjerne éttaller:

RumFig2: *Hvis en matrix M har 3 rækker, vil kommandoen* $M := \mathrm{hk}(M)$ *tilføje en fjerde række bestående af éttaller, og hvis M har 4 rækker, vil kommandoen* $M := \mathrm{hk}(M)$ *fjerne den fjerde række.*

- Find et af dine dokumenter som indeholder en matrix M der fastlægger en figur.
- Skriv $M := \mathrm{hk}(M)$.
- Skriv $M =$ for at se at der er tilføjet éttaller.
- Skriv $M := \mathrm{hk}(M)$.
- Skriv $M =$ for at se at éttallerne er blevet fjernet.

Opgave 21

Når en søjlematrix med fire rækker skal ganges med en matrix M fra venstre, så skal M have fire søjler, og når resultatet skal være en søjlematrix med 4 rækker, så skal M også have fire rækker.

I opgave 16 spejlede vi i xz-planen ved at gange fra venstre med

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Nu skal vi i stedet bruge

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hvor der til **A** er tilføjet

$$\begin{array}{cccc} & & & 0 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Gang

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

med **B** fra venstre.

Skriv den 4×4 - matrix som svarer til en drejning på $45°$ om z-aksen.

Opgave 22

En parallelforskydning med vektoren

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

fører et punkt $P(x, y, z)$ over i punktet $Q(x-5, y+3, z+1)$.

Sæt **A** lig den 4×4 - matrix som svarer til en parallelforskydning med $\vec{v}$.

Udregn derefter

$$\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Opgave 23

Brug sætning 7 til at bestemme matricen der hører til transformationen der kan frembringes ved først at dreje $31°$ om x-aksen og derefter parallelforskyde stykket 4 i x-aksens retning.

Fremstil et billede der viser en eller anden figur M samt den figur N som M føres over i ved den nævnte transformation

Drejning om vilkårlig linje

Lad A og B være to forskellige punkter på en linje l. Vi vil nu angive hvordan man kan finde matricen der svarer til at dreje vinklen v om l sådan at positivt v svarer til en drejning mod uret når man ser fra B mod A.

Da vi ikke har formler for at dreje om andre linjer end koordinatakserne, vil vi flytte l over i en koordinatakse, dreje om denne, og derefter flytte l tilbage.

Flytningen af l må foregå i en række trin hvor hvert trin er en transformation hvor vi kender den tilhørende matrix. Til sidst kan vi gange alle matricerne for at få den matrix der svarer til drejningen om l.

Den søgte drejning kan fx fås frem på følgende måde:

(1) Parallelforskyd med en vektor $\vec{r}$ så A føres over i koordinatsystemets begyndelsespunkt.

(2) Drej en vinkel s om y-aksen så B kommer til at ligge i yz-planen.

(3) Drej en vinkel t om x-aksen så B kommer til at ligge på z-aksens positive del.

(4) Drej vinklen v om z-aksen.

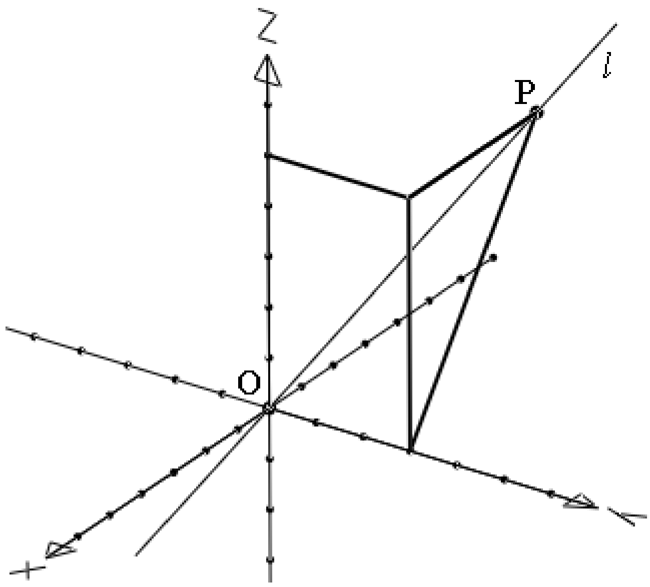
(5) Drej vinklen $-t$ om x-aksen.

(6) Drej vinklen $-s$ om y-aksen.

(7) Parallelforskyd med vektoren $-\vec{r}$.

Opgave 24

På figuren er vist en linje l som går gennem punkterne $O(0,0,0)$ og $P(-4,3,5)$.



Figur 12

Bestem den vinkel rummet skal drejes om y-aksen for at linjen l føres over i yz-planen.

Opgave 25 Afleveringsopgave

En linje m går gennem punkterne $A(3,-2,1)$ og $B(-1,1,6)$. Rummet drejes $53°$ om m sådan at drejningen foregår mod uret når man ser fra B til A.

Bestem matricen svarende til denne drejning.

Fremstil et billede der viser en eller anden figur som ikke er for simpel.

Fremstil et andet billede der viser samme figur efter den omtalte drejning.

Nedskriv mellemregninger med forklaring.

Lav evt. en animation der viser figuren dreje.